

# Monotonie

Dédou

Février 2011

# Fonctions croissantes

On dit qu'une fonction  $f$  est croissante ssi

pour  $x$  et  $y$  dans le DD de  $f$ , si on a  $x \leq y$ , on a aussi  $f(x) \leq f(y)$ .

En langage plus formel, ça donne

$$\forall x, y \in DD(f), x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Exo 1

Donnez la définition formelle de "  $f$  est décroissante " .

# Fonctions strictement croissantes

On dit qu'une fonction  $f$  est strictement croissante ssi pour  $x$  et  $y$  dans le DD de  $f$ , si on a  $x < y$ , on a aussi  $f(x) < f(y)$ .

En langage plus formel, ça donne

$$\forall x, y \in DD(f), x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

## Exemple

La fonction cube  $x \mapsto x^3$  est strictement croissante, bien que sa dérivée s'annule (en zéro).

# Fonctions croissantes non strictement croissantes

Quand nos fonctions usuelles sont croissantes

elles sont le plus souvent strictement croissantes.

Pour fabriquer une fonction croissante non strictement, il faut se creuser la cervelle.

Exemple

La fonction  $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est croissante non strictement.

Exo 2

Donner un exemple de fonction décroissante non strictement.

# Fonctions monotones

On dit qu'une fonction  $f$  est monotone ssi elle est soit croissante soit décroissante.

## Contre-exemple

La fonction carré  $x \mapsto x^2$  n'est pas monotone : en effet, bien qu'elle soit "tantôt croissante, tantôt décroissante", elle n'est ni croissante ni décroissante.

## Exo 3

Devinez la définition de "fonction strictement monotone".

## Fonctions parfois croissantes

Bien que la fonction carré  $x \mapsto x^2$  ne soit pas monotone, on a des choses intéressantes à dire sur son sens de variation.

On dit qu'une fonction est croissante sur une partie  $I$  de  $DD(f)$  ssi

$$\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

On s'intéresse surtout au cas où  $I$  est un intervalle.

### Exemple

La fonction carré est croissante sur l'intervalle  $[2, e[$ .

On a les notions voisines de décroissance, croissance stricte, monotonie, etc, sur  $I$ .

# Intervalles de monotonie

On dit que  $I$  est un intervalle de stricte monotonie de  $f$  ssi

- $I$  est contenu dans  $DD(f)$  et
- $f$  est strictement monotone sur  $I$ .

## Exemple

L'intervalle  $[0, \pi[$  est un intervalle de stricte monotonie de la fonction cosinus.

## Exo 4

Donnez un intervalle de stricte monotonie de la fonction sinus.

## Intervalles de stricte monotonie maximaux

C'est un peu débile de dire que la fonction carré est croissante sur  $[2; e[$  alors qu'on sait bien que c'est une information tronquée, la bonne info étant que cette fonction est croissante (et même strictement) sur  $[0, +\infty[$ .

On dit que  $I$  est un intervalle de stricte monotonie maximal de  $f$  ssi

- $I$  est un intervalle de stricte monotonie de  $f$
- $I$  n'est pas contenu dans un intervalle de stricte monotonie de  $f$  plus grand (strictement).

### Exemple

L'intervalle  $[0, \pi]$  est un intervalle de stricte monotonie maximal de la fonction cosinus.

### Exo 6

Donnez un intervalle de stricte monotonie maximal de la fonction cosinus.

# Tableau de variation

Le tableau de variation d'une fonction met en évidence ses intervalles de stricte monotonie maximaux.

## Exo 7

Donnez les intervalles de stricte monotonie maximaux d'une fonction  $f$  dont voici le TV :

|        |           |            |            |            |            |
|--------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| $x$    | $-\infty$ | $-7$       | $3$        | $4$        | $+\infty$  |
| $f(x)$ |           | $4$        |            | $6$        |            |
|        | $2$       | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |
|        |           |            | $0$        |            | $-\infty$  |

Cette fonction a une infinité d'intervalles de stricte monotonie, mais seulement quatre d'entre eux sont maximaux.

## Proposition

- La somme de deux fonctions croissantes sur  $I$  est croissante sur  $I$ .
- Le produit de deux fonctions **positives** croissantes sur  $I$  est une fonction croissante sur  $I$ .
- Le quotient d'une fonction **positive** croissante sur  $I$  par une fonction **positive** et **décroissante** sur  $I$  est une fonction croissante sur  $I$ .
- L'opposée d'une fonction croissante sur  $I$  est décroissante sur  $I$ , et vice-versa.

## Exo 8

Ecrivez l'énoncé analogue concernant l'addition de fonctions strictement décroissantes.

# Monotonie et factorisation

La notion de monotonie est là pour traiter simultanément le cas "croissant" et le cas "décroissant" (on parle de *factorisation*). Mais attention, les deux énoncés (vrais)

- La somme de deux fonctions croissantes sur  $I$  est croissante sur  $I$ .
- La somme de deux fonctions décroissantes sur  $I$  est décroissante sur  $I$ .

ne peuvent pas être factorisés en l'énoncé

La somme de deux fonctions monotones sur  $I$  est monotone sur  $I$ .

qui est faux.

# Addition de fonctions monotones

## Exemple

Les fonctions  $x \mapsto x^3$  et  $x \mapsto -x$  sont monotones, mais leur somme  $x \mapsto x^3 - x$  ne l'est pas .

## Exo 9

Donner un autre exemple d'une somme de deux fonctions monotones qui n'est pas monotone.

## Proposition

La composée de deux fonctions monotones est monotone.  
La composée de deux fonctions strictement monotones est strictement monotone.

Et ça se démontre !

Cet énoncé se comprend avec un dessin que je sais faire au tableau mais pas sur le ueb.

## Proposition

Soit  $f$  dérivable sur l'intervalle  $I$ . Alors

$f$  est croissante sur  $I$  ssi  $f'$  est positive sur  $I$ .

## Exo 10

Donnez l'énoncé analogue pour la décroissance.

## Proposition

Soit  $f$  dérivable sur l'intervalle  $I$ . Si  $f'$  est strictement positive sur  $I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Bien voir que cette fois, la condition est suffisante mais pas nécessaire.

## Exo 11

Donnez un exemple de fonction strictement croissante dont la dérivée n'est pas strictement positive.