

Bornes des fonctions

Dédou

Février 2011

Fonctions majorées

Certaines fonctions sont majorées (par un nombre, bien sûr) et d'autres ne le sont pas.

Exemple

La fonction cosinus est majorée par 1 (et d'ailleurs aussi par 2), tandis que la fonction exponentielle n'est pas majorée du tout.

Exo 1

Donnez un autre exemple de fonction majorée et de fonction non majorée.

Fonctions minorées

Certaines fonctions sont minorées (par un nombre, bien sûr)
et d'autres ne le sont pas.

Exemple

La fonction exponentielle est minorée par 0 , tandis que la fonction logarithme n'est pas minorée du tout.

Exo 2

Donnez un autre exemple de fonction minorée et de fonction non minorée.

Fonctions bornées

Certaines fonctions sont majorées et minorées
on dit qu'elles sont bornées.

Exemples

La fonction sinus est bornée. Les fonctions logarithme et exponentielle ne le sont pas.

Exo 3

Donnez un autre exemple de fonction bornée et de fonction non bornée.

Maximum d'une fonction

Certaines fonctions majorées atteignent leur maximum.

Et d'autres ne l'atteignent pas.

Exemples

La fonction cosinus atteint son maximum en 0. La fonction $x \mapsto -e^x$ n'atteint pas son maximum, bien qu'elle soit majorée par 0.

Exo 4

Donnez un exemple de fonction qui, bien que minorée, n'atteint pas son minimum.

Borne supérieure d'une fonction

La fonction $x \mapsto -e^x$ n'atteint pas son maximum, mais si elle l'atteignait, ce serait 0 ! Ce nombre est le plus petit des majorants de cette fonction. On dit aussi que c'est sa borne supérieure.

Définition

- a) La borne supérieure d'une fonction majorée f , notée $\sup f$, est le plus petit de ses majorants (il y en a toujours un).
- b) La borne supérieure d'une fonction non majorée est $+\infty$.

Exo 5

Donnez la définition de la borne inférieure, $\inf f$, d'une fonction f .

Bornes et TV

Les bornes (supérieure et inférieure) d'une fonction se lisent sur son TV : ce sont le plus grand et le plus petit des nombres qui apparaissent dans la ligne des y .

Exo 6

a) Quelles sont les bornes de la fonction dont voici le TV :

x	$-\infty$	-7	3	4	$+\infty$
y		4		6	
	2		3		3

Diagram description: A table representing a table of values (TV) for a function. The x-axis has points $-\infty$, -7 , 3 , 4 , and $+\infty$. The y-axis has values 2, 4, 6, and 3. Arrows indicate the function's behavior: an upward arrow from $y=2$ to $y=4$ between $x=-\infty$ and $x=-7$; a downward arrow from $y=4$ to $y=3$ between $x=-7$ and $x=3$; an upward arrow from $y=3$ to $y=6$ between $x=3$ and $x=4$; and a downward arrow from $y=6$ to $y=3$ between $x=4$ and $x=+\infty$.

b) Sont-elles atteintes ?