Approximation linéaire

Dédou

Février 2011

La tangente

Les braves fonctions ont une tangente en chaque point de leur graphe (et ça se dessine).

Le slogan, c'est

"Au voisinage d'un point, on approche la fonction par sa tangente en ce point".

Il vaut donc mieux savoir calculer cette tangente. Cette tangente est une fonction affine, ou plutôt une droite (son graphe).

La même sans les abus

Dans la page précédente, on a mélangé le langage des fonctions et celui des graphes. Il vaudrait mieux dire :

"Les graphes des braves fonctions ont une tangente en chaque point"
que
"Les braves fonctions ont une tangente en chaque point"

mais ça conduit à dire

"Au voisinage d'un point, on approche la fonction par la fonction affine dont le graphe est tangent à celui de f au point correspondant"
qui est bien plus lourd que
"Au voisinage d'un point, on approche la fonction par sa tangente en ce point".

Tangente et linéarisée

Pour éviter la confusion entre la fonction affine et son graphe

on donne un nom à la fonction dont la tangente est le graphe.

Pour f dérivable en a, on appelle *linéarisée* de f en a

la fonction dont le graphe est la tangente au graphe de f en a (plus exactement en $(a, f(a))$).

On veut donc savoir calculer

la tangente et la linéarisée.

Le calcul de la tangente

La tangente en a au graphe de la fonction dérivable f a pour équation

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Exemple :

la tangente en 3 au graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est la droite déquation $y = 6x - 9$.

Exo 1

Calculez la tangente en 4 au graphe de la fonction $x \mapsto 2x^3 + 1$.

Le calcul de la linéarisée

La linéarisée en a de la fonction dérivable f est la fonction

$$x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a).$$

Exemple :

la linéarisée en 3 de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est la fonction $x \mapsto 6x - 8$.

Exo 2

Calculez la linéarisée en 4 de la fonction $x \mapsto 2x^3 + 3$.

Comment font les physiciens ?

L'approximation linéaire des physiciens

c'est la pseudo-formule :

$$f(a+h) \sim f(a) + f'(a)h.$$

qui dit que si on ne connait pas $f(a+h)$ et si h est petit, "on peut" essayer de mettre $f(a) + f'(a)h$ à la place.

Nous, on va dire que

Le nombre $f(a) + f'(a)h$ est une approximation linéaire du nombre $f(a+h)$.
Cette approximation est d'autant moins illégitime que h est petit.

L'approximation linéaire des nombres : exemple

Faire une approximation linéaire d'un nombre, c'est

- choisir (ou comprendre) qui sont f et a (et du coup h),
- calculer $f(a)$, h et $f'(a)$
- "proposer" $f(a) + hf'(a)$ comme approximation de $f(a+h)$.

Exemple

Si on veut une approximation du nombre $\sin 3$ on peut prendre

- $f := \sin$
- $a := \pi$
  (π est le nombre le plus proche de 3 dont le sinus est connu)
- $h := 3 - \pi$ (pour avoir $a + h = 3$).

On trouve alors $f(a) = \sin \pi = 0$ et $f'(a) = \cos \pi = -1$
ce qui donne

$$\pi - 3 \text{ comme approximation linéaire de } \sin 3.$$

L'approximation linéaire des nombres : exercice

Faire une approximation linéaire d'un nombre, c'est donc

- choisir (ou comprendre) qui sont f et a (et du coup h),
- calculer $f(a)$, h et $f'(a)$
- "proposer" $f(a) + hf'(a)$ comme approximation de $f(a+h)$.

Exo 3

Choisissez f, a et h pour une approximation linéaire de $\cos 6$.