Noyau et image des applications linéaires

Dédou

Novembre 2010

Noyau d'une application linéaire : définition

Définition

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, son noyau, noté $Kerf$ est l'ensemble des vecteurs de E que f annule :

$$Kerf := \{v \in E | f(v) = 0\}.$$

Exemple

Le noyau de la projection $p := (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ sur son plan horizontal est l'axe vertical défini par $x = y = 0$.

Exo 1

Quel est le noyau de la projection $p := (x, y, z) \mapsto (0, 0, z)$ de $\mathbb{R}^3$ sur son axe vertical ?

Noyau et système linéaire homogène : exemple

Exemple

Le noyau de $f := (x, y, z) \mapsto (3x + 5y + 7z, 2x + 4y + 6z)$ est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 3x + 5y + 7z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0. \end{cases}$$

Autrement dit

L'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 3x + 5y + 7z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

est le noyau de l'application linéaire $(x, y, z) \mapsto (3x + 5y + 7z, 2x + 4y + 6z)$.

Noyau d'une application linéaire : exercice

Exo 2

a) Exprimez le noyau de $f := (x, y, z, t) \mapsto (3x + 7z - t, 2y + 6z)$ comme ensemble de solutions.

b) Exprimez l'ensemble des solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x + 4t = 0 \\ y - z - t = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{array} \right.$$

comme noyau.

Nature du noyau d'une application linéaire

Proposition

Le noyau d'une application linéaire de E dans F est un sous-espace vectoriel de E.

Et ça se prouve... trop facile !

Image d'une application linéaire : définition

Définition

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, son image, notée Imf est l'ensemble des vecteurs de F de la forme $f(v)$ avec $v \in E$:

$$Imf := \{f(v) | v \in E\}.$$

Exemple

L'image de la projection $p := (x, y, z) \mapsto (x, y)$ de $\mathbb{R}^3$ sur son plan horizontal est justement ce plan horizontal, d'équation $z = 0$.

Exo 3

Quelle est l'image de $(x, y, z) \mapsto (0, 0, z)$?

Image d'une application linéaire : exemple

Exemple

L'application linéaire $f := (x, y, z) \mapsto (3x + 5y + 7z, 2x + 4y + 6z)$ s'écrit aussi

$$f := (x, y, z) \mapsto x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Sous cet angle on voit (?) que les vecteurs de l'image de f sont exactement les combinaisons linéaires du système de trois vecteurs $((3, 2), (5, 4), (7, 6))$:

$$Im \ \ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 5y + 7z \\ 2x + 4y + 6z \end{pmatrix} \quad = \quad < \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} > .$$

Autrement dit

L'image de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par $((3, 2), (5, 4), (7, 6))$.

Mais qui sont ces vecteurs ?

Si on écrit

$$f := (x, y, z) \mapsto x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

on voit (?) que les trois vecteurs

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sont les images par f de la base canonique. Donc

L'image de l'application linéaire f est

le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par les images par f de la base canonique.

Image d'une application linéaire : exercice

Exo 4

Donnez des générateurs de l'image de
$(x, y) \mapsto (3x + 7y, 2y, x - y)$.

Image d'une application linéaire : le cas général

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors

- l'image de f est un sous-espace vectoriel de F ;
- si le système de vecteurs $(c_1, \dots, c_n)$ engendre E (en particulier si c'est une base de E), alors l'image de f est engendrée par le système $(f(c_1), \dots, f(c_n))$.

Et ça se prouve.

Attention !

Même si $(c_1, \dots, c_n)$ est une base de E, $(f(c_1), \dots, f(c_n))$ n'est pas forcément une base de Imf. Par exemple pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, et $(c_1, \dots, c_3)$ la base canonique, $(f(c_1), \dots, f(c_3))$ ne peut pas être libre (trop de vecteurs).