Coordonnées dans une base

Dédou

Novembre 2010

L'équation caractéristique des coordonnées : exemple

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ de notre espace vectoriel favori $\mathbb{R}^2$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux nombres x et y qui vérifient l'équation *caractéristique des coordonnées* :

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

La recherche des coordonnées est donc un problème de décomposition linéaire.

Exemple : L' équation caractéristique des coordonnées x et y du vecteur $\vec{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique des coordonnées : exercice

Exo 1

a) Ecrire l' équation caractéristique des coordonnées x et y du vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.

b) Est-ce que ces coordonnées sont 2 et 1 ?

Vecteur de coordonnées données dans une base donnée

Etant donnés x et y, il existe un unique vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées dans notre base soient ces deux nombres, et il est donné par la formule :

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Exemple

Le vecteur de coordonnées 2 et 3 dans la base $(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix})$ est $(\begin{pmatrix} 26 \\ 31 \end{pmatrix})$

Exo 2

Quel est le vecteur de coordonnées 5 et -2 dans la base $(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$?

Coordonnées d'un vecteur dans une base

Inversement, étant donné un vecteur $\vec{v}$ quelconque de notre plan, il existe un unique couple (x, y) de nombres vérifiant l'équation (caractéristique des coordonnées) :

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Ces deux nombres x et y sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans notre base .

Exo 3

Quelles sont les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$?

Ligne ou colonne des coordonnées

Plutôt que de dire

$$"x \text{ et } y \text{ sont les coordonnées de } \vec{v} \text{ dans cette base}",$$

on préfère insister sur le fait que l'ordre dans lequel on donne x et y est important et dire

$$"(x, y) \text{ est la ligne des coordonnées de } \vec{v} \text{ dans cette base}",$$

ou encore

$$"\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est la colonne des coordonnées de } \vec{v} \text{ dans cette base}".$$

Equations vectorielles

La recherche de coordonnées consiste donc à résoudre l'équation

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

où $\vec{v}, \vec{i}, \vec{j}$ sont connus et x et y sont les inconnues.
Il s'agit d'une équation vectorielle : on demande que deux vecteurs soient égaux.

Comment aborde-t-on une équation vectorielle ?

L'égalité vectorielle

L'égalité des points (ou des vecteurs) du plan ne nous fait pas peur. On sait la ramener à des égalités entre nombres :

Deux points de $\mathbb{R}^2$ sont égaux ssi

ils ont même abscisse et même ordonnée.

Autrement dit, avec la notation évidente, pour v et w quelconques dans $\mathbb{R}^2$,

$$v = w \Leftrightarrow \begin{cases} x_v = x_w \\ y_v = y_w \end{cases} .$$

Exo 4

Convertissez l'équation vectorielle $(x, x - y) = (x - 2y, x^2)$ en système d'équations numériques.

Recherche de coordonnées

Pour trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base,

- on écrit l'équation (vectorielle) caractéristique
- on convertit cette équation en système numérique
- on résout ce système, qui a une solution unique
- la ligne solution est la ligne de coordonnées cherchée.