

INTRODUCTION AUX SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES.

Sebastian Minjeaud

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné,
CNRS, Université Côte d'Azur.

Mat' du labo,
26/09/24.

▶ Discrétisation de l'équation de **Korteweg-de Vries** (KdV)
par **éléments finis** (spectraux) avec **R. Pasquetti**

- ◆ principe des éléments finis
- ◆ stabilisation
- ◆ conservation des invariants

▶ Discrétisation des équations d'**Euler** par **volumes finis**
sur **maillages généraux** avec **T. Goudon, F. Berthelin, J. Llobell, C. Ghosn**

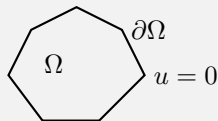
- ◆ principe des volumes finis
- ◆ maillages généraux et décalés
- ◆ schémas “asymptotic preserving”
- ◆ conservation de l'énergie et convergence à la Lax-Wendroff

► Considérons le problème suivant :

Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\partial_{xx}u = f, & \text{dans } \Omega, \text{ ouvert borné régulier,} \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \Omega =]a, b[\\ \hline u(a) = 0 \qquad \qquad \qquad u(b) = 0 \end{array}$$



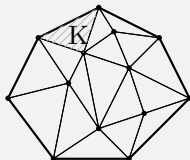
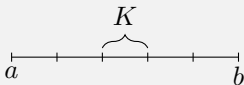
► Formulation faible ou variationnelle : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \partial_x u \cdot \partial_x v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

- ◆ formulation équivalente
- ◆ u est le minimum de l'énergie

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_x v|^2 - \int_{\Omega} f v.$$

► Maillage



► Espace d'approximation

$$V_{h,0} = \left\{ v_h \in C^0(\Omega) \mid v_h|_K \in P^1, \forall K \quad \text{et} \quad v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \subset H_0^1(\Omega).$$

► Méthode des éléments finis : Trouver $u_h \in V_{h,0}$,

$$\int_{\Omega} \partial_x u_h \cdot \partial_x v_h = \int_{\Omega} f v_h, \quad \forall v_h \in V_{h,0}.$$

- ◆ Minimum de J sur $V_{h,0}$: $J(u_h) = \min_{v_h \in V_{h,0}} J(v_h)$.
 - ◆ Problème linéaire de dimension finie.
- Méthode bien établie pour ce type de problèmes (elliptiques).

EQUATION DE BURGERS

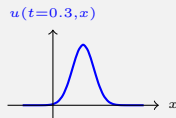
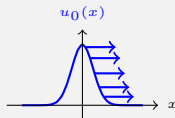
$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \text{ sur }]a, b[\\ u(t, a) = u(t, b), \partial_x u(t, a) = \partial_x u(t, b), \forall t \geq 0 \text{ (périodicité)}, \\ u(t = 0, x) = u_0(x), \text{ (condition initiale)}. \end{cases}$$

► “Toy model” pour les équations d’Euler, de Navier-Stokes.

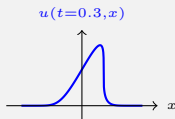
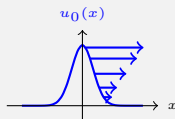
► Equation de transport non linéaire

↪ cas linéaire à vitesse constante c

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u(x, t) = u_0(x - ct).$$



↪ Burgers : la vitesse dépend de la solution u



► Perte de régularité (chocs)

- Approximation par éléments finis
Trouver $u_h \in V_h^{\text{per}}$ tel que

$$\int_a^b \partial_t u_h v_h + \int_a^b u_h \partial_x u_h v_h = 0$$

- ▶ Approximation par éléments finis
Trouver $u_h \in V_h^{\text{per}}$ tel que

$$\int_a^b \partial_t u_h v_h + \int_a^b u_h \partial_x u_h v_h = 0$$

- ▶ Approximation **polynomiale par morceaux**
 \implies **instabilités**

- ▶ Approximation par éléments finis
Trouver $u_h \in V_h^{\text{per}}$ tel que

$$\int_a^b \partial_t u_h v_h + \int_a^b u_h \partial_x u_h v_h = 0$$

- ▶ Approximation **polynomiale par morceaux**
 \implies **instabilités**
- ▶ Méthode de stabilisation basée sur la **diffusion numérique**
(Upwind, Spectral vanishing viscosity, Entropy viscosity)

EQUATION DE KORTEWEG-DE VRIES (KDV)

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0, \text{ sur }]a, b[\\ u(t, a) = u(t, b), \partial_x u(t, a) = \partial_x u(t, b), \dots, \forall t \geq 0 \text{ (périodicité),} \\ u(t = 0, x) = u_0(x), \text{ (condition initiale).} \end{cases}$$

- ▶ Ajout du terme dispersif $\partial_{xxx} u$
- ▶ Effet régularisant \implies pas de perte de régularité.

PROBLÉMATIQUES/ENJEUX

- ▶ Peut-on approcher des termes d'ordre 3 (à un ordre élevé) ?
- ▶ Est ce que les stabilisations visqueuses sont utiles ?
- ▶ Peut-on conserver certains invariants associés à l'équation ?
 - ◆ Masse : on intègre l'équation

$$\partial_t \left(\int_a^b u \right) + \int_a^b \partial_x \left(u^2/2 + \partial_{xx} u \right) = 0 \implies \partial_t \left(\int_a^b u \right) = 0$$

- ◆ Energie : on multiplie par u et on intègre l'équation

$$\partial_t \left(\int_a^b u^2/2 \right) + \int_a^b \partial_x \left(u^3/3 - (\partial_x u)^2/2 \right) = 0 \implies \partial_t \left(\int_a^b u^2/2 \right) = 0$$

DISCRÉTISATION D'UN TERME D'ORDRE 3

- ▶ Des termes de dérivée seconde dans les formulations variationnelles :

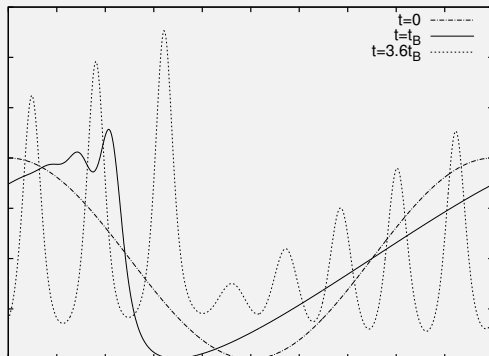
$$\int_{\Omega} \partial_{xx} u \partial_x v \quad \text{ou} \quad \int_{\Omega} \partial_x u \partial_{xx} v$$

- ▶ On ne peut pas dériver deux fois les éléments de V_h
 - ◆ Raccordement C^1 entre les éléments
↪ plus grande dimension, conditions aux bords difficile à définir
 - ◆ Etablir des algorithmes de projection dans V_h des dérivées
↪ coût de calcul à maîtriser, facile à généraliser

EQUATION DE KORTEWEG-DE VRIES (KdV)

CÔTÉ STABILITÉ

- Stabilisation visqueuses non nécessaires



EQUATION DE KORTEWEG-DE VRIES (KdV)

CÔTÉ STABILITÉ

► Stabilisation visqueuses non nécessaires

► Préservation des invariants

◆ masse

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_h = 0.$$

◆ énergie

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_h^2/2 = 0.$$

Time	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5
C_1	1.77245	1.77245	1.77245	1.77245	1.77245	1.77245
C_2	1.25331	1.25331	1.25331	1.25331	1.25331	1.25331
C_3	1.01957	1.01907	1.01068	1.00415	1.01051	1.01660

- Revenons au problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \text{ (ouvert borné régulier),} \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Bilan sur chaque maille K

$$-\int_K \Delta u = \int_K f$$

$$-\int_{\partial K} \nabla u \cdot \mathbf{n} = \int_K f, \quad (\text{formule de Green})$$

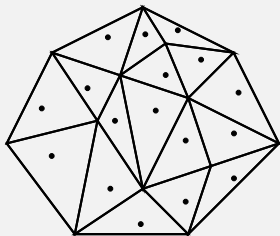
$$-\sum_{\sigma \subset \partial K} \int_{\sigma} \nabla u \cdot \mathbf{n} = \int_K f$$

- Schéma de la forme

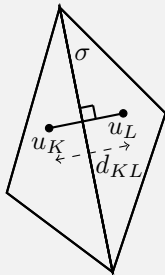
$$-\sum_{\sigma \in \partial K} F_{K,\sigma} = \int_K f$$

où $F_{K,\sigma}$ approche le flux $\int_{\sigma} \nabla u \cdot \mathbf{n}$ sortant de K à travers σ .

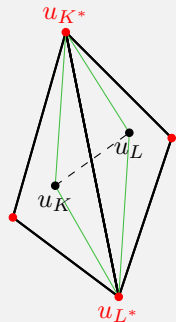
- Maillage volumes fini



- Formule pour les flux et maillage admissible



$$F_{K,\sigma} = |\sigma| \frac{u_L - u_K}{d_{KL}}.$$



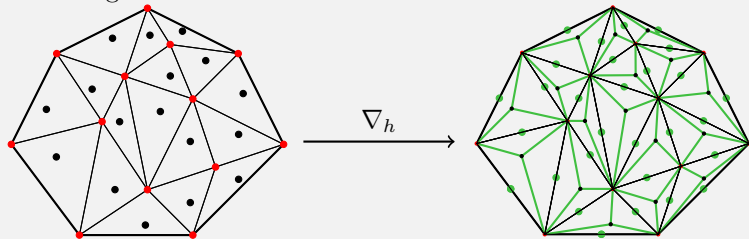
- Définition d'un gradient discret

$$(\nabla_h u_h)|_D = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{u_L - u_K}{d_{KL}} \vec{n}_{KL} + \frac{u_{L^*} - u_{K^*}}{d_{K^*L^*}} \vec{n}_{K^*L^*} \right).$$

- Définition du flux

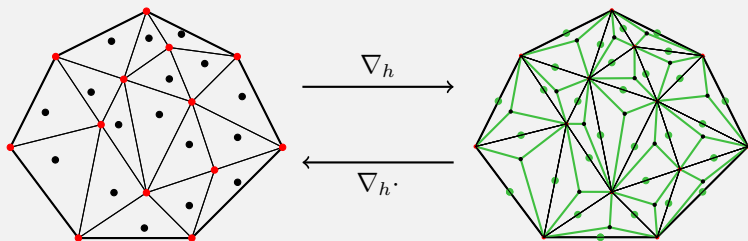
$$F_{K,\sigma} = |\sigma| (\nabla_h u_h)|_{D_\sigma} \cdot \vec{n}_{KL}.$$

- Maillage DDFV



- Une divergence discrète

$$(\nabla_h \cdot \vec{\xi}_h)|_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \subset K} |\sigma| (\vec{\xi}_h)_\sigma \cdot \vec{n}_{KL}.$$



- Une formule d'intégration par partie!

$$\langle \vec{\xi}_h, \nabla_h u_h \rangle_{\Omega, h} = - \langle \nabla_h \cdot \vec{\xi}_h, u_h \rangle_{\Omega, h} + \text{termes de bord.}$$

SYSTÈME D'EULER (BAROTROPE)

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0, \\ \partial_t (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\mathcal{M}^2} \nabla (p(\rho)) &= 0,\end{aligned}$$

- où
- ◆ ρ la densité
 - ◆ \vec{u} la vitesse
 - ◆ p une fonction donnée de ρ
 - ◆ \mathcal{M} le nombre de Mach.

SCHÉMA SUR GRILLE DÉCALÉ

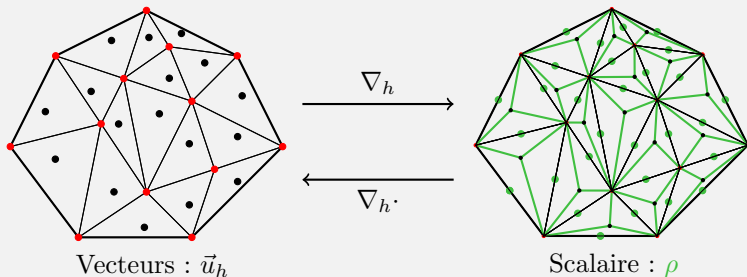


SCHÉMA QUI PRÉSERVE L'ASYMPTOTIQUE

- ▶ Lorsque $\mathcal{M} \rightarrow 0$, ce système tend vers l'incompressible

$$\begin{aligned}\rho &= \text{constante,} \\ \partial_t \vec{u} + \nabla(\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0.\end{aligned}$$

- ▶ Peut-on intervertir les limites $\mathcal{M} \rightarrow 0$ et $h \rightarrow 0$?

DIFFICULTÉS

- ▶ De fortes contraintes sur le pas de temps
- ◆ Formellement, le système (1D) s'écrit sous la forme

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix} + A(\rho, u) \partial_x \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix} = 0 \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + \frac{\sqrt{p'(\rho)}}{\mathcal{M}} & 2u \end{pmatrix}$$

- ◆ Les valeurs propres de A se comportent en $\frac{1}{\mathcal{M}}$.

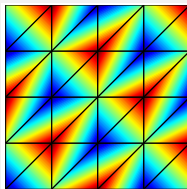
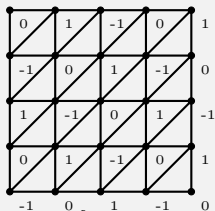
DIFFICULTÉS (SUITE)

- ▶ De fortes contraintes sur le pas de temps
- ▶ Des instabilités spécifiques au cas incompressibles apparaissent

↪ Non injectivité du gradient de pression

$$\vec{u}_h \in X_h = \left\{ \vec{v}_h \in [C^0(\Omega)]^2 \mid \forall K, (\vec{v}_h)|_K \in [P^1]^2 \text{ et } \vec{v}_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

$$p_h \in M_h = \left\{ q_h \in C^0(\Omega) \mid \forall K, (q_h)|_K \in P^1 \text{ et } \int_{\Omega} q_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$



$$\begin{aligned} \forall v_h \in X_h, \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot v_h &= \sum_K (\nabla \cdot v_h)|_K \int_K p_h \\ &= \sum_K (\nabla \cdot v_h)|_K \frac{|K|}{3} \left[p_h(s_1) + p_h(s_2) + p_h(s_3) \right] = \mathbf{0} \end{aligned}$$

DIFFICULTÉS (SUITE)

- ▶ De fortes contraintes sur le pas de temps
- ▶ Des instabilités spécifiques au cas incompressibles apparaissent
↪ moins présentes pour les schémas sur grilles décalés.
- ▶ Perte de précision
↪ Apparition de pressions parasites en $O(\mathcal{M})$.

APPROXIMATION DU TERME D'INERTIE

- Comment obtenir un bilan d'énergie cinétique au niveau discret ?

$$\left[\partial_t(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) \right] \cdot \vec{u} = \left[\partial_t \left(\rho \frac{\vec{u}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\vec{u}^2}{2} \vec{u} \right) \right] + \frac{u^2}{2} \left[\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right]$$

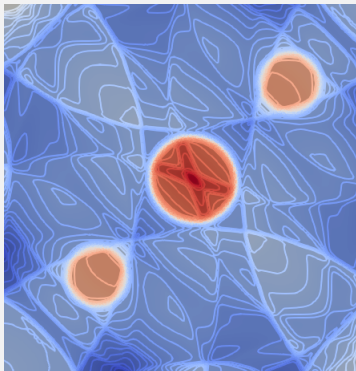
- Relier les flux de qdm $\nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u})$ aux flux de masse $\nabla \cdot (\rho \vec{u})$.
- Transférer le bilan de masse d'un maillage à l'autre

$$\frac{\rho_{h,K}^{n+1} - \rho_{h,K}^n}{dt} + \sum_{\sigma \subset K} F_{K,\sigma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho_{h,\sigma}^{n+1} - \rho_{h,\sigma}^n}{dt} + \sum_{\epsilon \subset D_\sigma} F_{\sigma,\epsilon} = 0$$

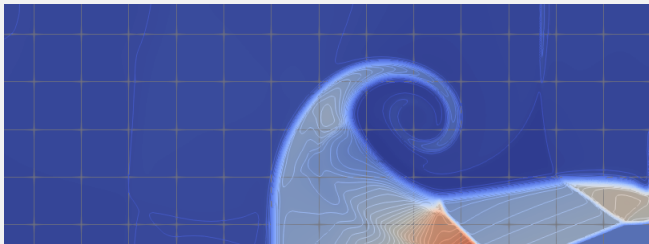
- Définition des flux de quantité de mouvement à partir de $F_{\sigma,\epsilon}$.
- Estimation insuffisante pour de la compacité

↪ Théorème à la Lax Wendroff :

Si les solutions numériques convergent alors
elles convergent vers la bonne solution.



$\rho = 1$	$\rho = 0.125$ $p = 0.1$
$p = 1$	$\rho = 1$ $p = 0.1$



Merci pour votre attention !