UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 31

BIFURCATION et STABILITE

Gérard IOOSS

Année Universitaire I972-I973

BIFURCATION ET STABILITE

G. IOOSS

Introduction.

Ce cours comprend essentiellement deux parties, d'abord une partie (chapitres I à V) contenant l'étude de problèmes linéaires dont la solution se révèlera indispensable dans la seconde partie (chapitres VI à IX) qui concerne les problèmes non linéaires. Les trois premiers chapitres sont destinés à des lecteurs ne connaissant a priori que les résultats élémentaires sur les espaces de Banach. On traite au chapitre IV les problèmes linéaires d'évolutions et on définit la notion, très importante pour la suite, de semi-groupe holomorphe. Le chapitre V est consacré à l'étude des perturbations "analytiques" des opérateurs linéaires non bornés et des semi-groupes holomorphes.

Le but du chapitre VI est de rappeler les techniques essentielles, utiles dans la suite, comme l'emploi du théorème des fonctions implicites. On aborde enfin au chapitre VII l'étude du problème d'évolution non linéaire de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Lu - M(u) = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où L est un opérateur linéaire non borné et M non linéaire , non borné vérifiant pour u fixé et k voisin de 0 $M(ku) = O(k^2)$, dans un cadre fonctionnel simple. On donne des résultats sur la stabilité de la solution nulle de (1) selon le spectre de l'opérateur L . L'optique de ce chapitre est différente de celle de la thèse de H. KIELHÖFER [1] et est considérablement simplifiée grâce à une estimation fondamentale ((1,I) au chapitre VII). Enfin il faut remarquer qu'un résultat analogue à celui du théorème 3 a été énoncé par V.I. IUDOVICH [2] dans le cas du système d'équations de Navier-Stokes.

Le chapitre VIII est consacré à l'étude des bifurcations de la solution nulle pour une équation du type

$$L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0,$$

où les opérateurs L et M dépendent maintenant analytiquement d'un paramètre λ. L' étude entreprise est entièrement analytique et n'utilise pas la théorie du degré topologique qui, à notre sens, ne donne pas de méthode constructive de résolution. Pour des références supplémentaires concernant ce type de problèmes on pourra consulter la bibliographie citée. Il faut toutefois noter que la théorie de la bifurcation a vu son intérêt croître depuis une décennie, et qu'elle doit beaucoup à V. I. IUDOVICH et W. VELTE qui ont expliqué mathématiquement certains phénomènes physiques intervenant en mécanique des fluides.

Le chapitre IX étudie la stabilité des solutions bifurquées pour le problème $\frac{du}{dt} + L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0,$

ce qui est essentiel puisque dans la nature, on ne peut raisonnablement observer que des phénomènes stables dans le temps. En fin de chapitre on donne un résultat nouveau sur l'évolution de la solution à partir de t = 0, qui donne accès à certains problèmes ouverts.

Enfin, le lecteur intéressé par une étude plus complète dans le cas précis de l'hydrodynamique, peut consulter le travail de K. KIRCHGASSNER et H. KIELHÖFER [3] ou encore celui de D.H. SATTINGER [4] dont les points de vue sont sensiblement différents.

Bibliographie.

[1] H. KIELHÖFER, Thèse, Hilbertraum - Theorie für fastlineare Anfangswertprobleme ; Bochum 1972.

[2] V.I. IUDOVICH, Sur la stabilité des écoulements stationnaires d'un fluide visqueux incompressible ; Doklady Akademii Nauk, SSSR, 1965 161, 5, p. 1037-1040.

[3] K. KIRCHGASSNER et H. KIELHÖFER, Stability and Bifurcation in fluid dynamics (à paraître dans Rocky Mountain J. Math.).

[4] D.H. SATTINGER, Topics in Stability and Bifurcation theory ; Lecture Notes, 1971-1972, University of Minnesota.

PLAN.

-:-:-:-

Cours de troisième cycle, année 1972-73.

MATHEMATIQUES APPROFONDIES

Gérard IOOSS

I - Compléments sur les espaces de Banach.

I. Théorème de Hahn-Banach et conséquences.

1) Lemme de Zorn.
2) Théorème de Hahn-Banach réel.
3) Théorème de Hahn-Banach complexe.
4) Conséquences du théorème de Hahn-Banach.

II. Théorème de Baire et conséquences.

1) Théorème de Baire.
2) Principe de "majoration uniforme".

Compléments sur les espaces de Banach.

I. Théorème de Hahn-Banach et conséquences.

1) Lemme de Zorn.

On admettra le lemme suivant, qui est équivalent à l'axiome du choix de Zermelo :

Soit un ensemble E muni d'une relation d'ordre partiel, si toute partie totalement ordonnée (par l'ordre induit) de E est majorée, alors il existe un élément maximal.

Ce lemme permet de démontrer le théorème suivant :

2) Théorème de Hahn-Banach réel.

Soit un espace vectoriel réel E et soit une fonction $p : E \to \mathbb{R}$ telle que : $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$; $p(\alpha x) = \alpha p(x), \alpha \geq 0$. Soit f une forme linéaire réelle définie sur un sous-espace $V \subset E$, telle que $f(x) \leq p(x)$, $x \in V$. Alors $\exists$ au moins un prolongement linéaire $F(x)$ défini sur E, tel que $F(x) \leq p(x)$, $x \in E$.

Démonstration : 1ère étape. On considère la famille de tous les prolongements linéaires g de f pour lesquels $g(x) \leq p(x)$, $x \in$ domaine de g. On définit une relation d'ordre partiel par : $h \succ g \iff h$ est un prolongement de g. Il est évident que toute partie totalement ordonnée est majorée : soit $\{h_i \,;\, i \in I\}$ une famille totalement ordonnée, on peut définir un majorant h, dont le domaine est la réunion des domaines des $\{h_i, i \in I\}$, qui sera un prolongement de f tel que $h(x) \leq p(x)$, $\forall x \in$ domaine de h [si $x \in$ domaine de h, $\exists i$ tel que $x \in$ domaine de h_i, et $h(x) = h_i(x) \leq p(x)$]. D'après le lemme de Zorn, il existe donc un élément (au moins un) maximal dans la famille. Notons $F(x)$ un élément maximal, on a donc $\forall x \in$ domaine D de F, $F(x) \leq p(x)$. Il reste à montrer que $D = E$.

2ème étape. Supposons donc que $D \neq E$. $\exists$ donc $x_0 \in E$ et $x_0 \notin D$, nous allons construire un prolongement de f défini sur le sous-espace D' engendré par D et x_0, et majoré par p ; d'où la contradiction.

Tout vecteur $x \in$ sous-espace D' admet une décomposition unique de la forme $x = x_D + \alpha x_o$ avec $x_D \in D$. Pour toute constante c, la forme linéaire g définie sur D' par

$$g(x) = F(x_D) + \alpha c$$

est un vrai prolongement de F. Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir c telle que $g(x) \leq p(x)$ pour $x \in D'$.

Soient x_D et $y_D \in D$, on a alors

$$F(y_D) - F(x_D) = F(y_D - x_D) \leq p(y_D - x_D) \leq p(y_D + x_o) + p(-x_D - x_o),$$

d'où
$$-p(-x_D - x_o) - F(x_D) \leq p(y_D + x_o) - F(y_D).$$

Le membre de gauche de l'inégalité est indépendant de y_D, tandis que le membre de droite est indépendant de x_D ; il existe donc une constante c telle que

$$\begin{array}{ll} (1) & \left\{ \begin{array}{l} c \leq p(y_D + x_o) - F(y_D), \ \forall y_D \in D \\ -p(-y_D - x_o) - F(y_D) \leq c, \ \forall y_D \in D. \end{array} \right. \\ (2) & \end{array}$$

On a alors, en utilisant (1) pour $\alpha > 0$, (2) pour $\alpha < 0$ et en notant $\alpha y_D = x_D$:

$$\alpha c \leq p(x_D + \alpha x_o) - F(x_D), \ \forall x_D \in D ; \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Choisissons dans l'expression de g, la constante c ainsi définie, on vérifie alors immédiatement que $\forall x \in D'$, $g(x) \leq p(x)$. ∎

3) Théorème de Hahn-Banach complexe.

Définition. Soit E un espace vectoriel normé, on note E^* l'espace vectoriel des formes antilinéaires continues sur E. E^* sera dit le "dual" de E.

On sait de manière classique que E^* est un espace de Banach (conséquence du fait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets).

Théorème de Hahn-Banach complexe. Soit V un sous-espace d'un espace vectoriel normé E. Alors, à tout $y^* \in V^*$, correspond un $x^* \in E^*$ tel que

$$\|x^*\| = \|y^*\| \ ; \ (x^*, y) = (y^*, y), \ \forall y \in V.$$

Remarque. Il existe un énoncé plus général utilisant seulement une semi-norme p sur E (pour nous, le théorème donné sera suffisant).

Démonstration : Si E est un espace réel, le théorème se déduit aisément du théorème de Hahn-Banach réel en prenant $p(x) = \|y^*\|.\|x\|$ (norme de x à une constante près) et $f = y^*$.

Supposons maintenant que E soit complexe. Pour tout $y \in V$, soient $f_1(y)$ et $f_2(y) \in \mathbb{R}$ définis par

$$(y^*,y) = f_1(y) + i\, f_2(y) , \qquad y \in V .$$

Alors, on a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x,y \in V$

$$\begin{cases} f_1(\alpha x+\beta y) = \alpha f_1(x) + \beta f_1(y) \\ |f_1(y)| \leqslant |(y^*,y)| \leqslant \|y^*\|.\|y\| . \end{cases}$$

Considérant E comme un espace vectoriel réel, on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach réel : $\exists$ une fonctionnelle linéaire réelle F_1 sur E telle que

$$\|F_1\| \leqslant \|y^*\| \quad \text{et} \quad \forall\, y \in V \quad F_1(y) = f_1(y) .$$

On définit maintenant la fonctionnelle x^* sur E complexe par :

$$x^*(x) = F_1(x) + i\, F_1(ix) ,$$

montrons que $x^* \in E^*$.

$$\begin{cases} x^*(\alpha x) = \alpha x^*(x) \quad \text{pour } \alpha \text{ réel} \\ x^*(ix) = F_1(ix) + i\, F_1(-x) = -i\, x^*(x) \\ x^*(y+z) = x^*(y) + x^*(z) \quad \forall\, y \text{ et } z \in E , \end{cases}$$

donc x^* est antilinéaire.

Posons maintenant $x^*(x) = r\, e^{i\theta}$, $r>0$, θ réel ; alors

$$|x^*(x)| = x^*(e^{+i\theta}x) = F_1(e^{+i\theta}x) \leqslant \|y^*\|.\|e^{+i\theta}x\| = \|y^*\|.\|x\| ,$$

ce qui prouve que $\|x^*\| \leqslant \|y^*\|$, d'où $x^* \in E^*$ et l'on peut noter $x^*(x) = (x^*,x)$.

Montrons enfin que x^* est un prolongement de y^* :

soit $y \in V$, alors $f_1(iy) + if_2(iy) = (y^*, iy) = -i(y^*, y) = -if_1(y) + f_2(y$
ce qui montre que : $f_2(y) = f_1(iy)$, d'où

$$(y^*, y) = f_1(y) + if_1(iy) \quad \forall\, y \in V \quad \text{et} \quad x^* \text{ prolonge } y^* .$$

On en conclut évidemment que $\|x^*\| \geqslant \|y^*\|$, ce qui entraîne $\|x^*\| = \|y^*\|$ puisqu'on a aussi l'inégalité inverse. ∎

4) Conséquences du théorème de Hahn-Banach.

Théorème. Soient V un sous-espace fermé de E (Banach), et $u_o \in E$, et $\notin V$. Alors $\exists$ $f \in E^*$ tel que $(f, u_o) = 1$, $(f, u) = 0$ $\forall u \in V$ et $\|f\| = 1/\mathrm{dist}(u_o, V)$.

Démonstration : Soit V' le sous-espace engendré par V et u_o , alors $\forall\, u \in V'$ on a $u = \xi u_o + v$ où $v \in V$. Si $\xi \neq 0$ on peut écrire

$$\|\xi^{-1}u\| = \|u_o + \xi^{-1}v\| \geqslant d \quad (d = \mathrm{dist}(u_o, V)) ,$$

d'où $|\xi| \leqslant \|u\|/d$ (encore vrai si $\xi = 0$). On définit alors la fonctionnelle f telle que $f(u) = \bar{\xi}$, $u \in V'$. f est antilinéaire et bornée $(1/d)$. En fait on a $\|f\| = 1/d$ car si l'on considère une suite $\{v_n\} \subset V$ telle que $\|u_o - v_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d$, alors

$$1 = (f, u_o - v_n) \leqslant \|f\| . \|u_o - v_n\| \longrightarrow \|f\| . d \implies \frac{1}{d} \leqslant \|f\| , \text{ d'où}$$

la conclusion **après extension de f sur E à l'aide du théorème de Hahn-Banach.** ∎

Corollaire. Pour tout $u_o \in E$, $\exists$ $f \in E^*$ tel que $(f, u_o) = \|u_o\|$, $\|f\| = 1$.

Une conséquence immédiate de ce corollaire est que

$$\|u\| = \sup_{0 \neq f \in E^*} \frac{|(f, u)|}{\|f\|} = \sup_{\|f\| = 1} |(f, u)| .$$

II. Théorème de Baire et conséquences.

1) Théorème de Baire. Si un espace métrique complet E est la réunion dénombrable de sous-ensembles fermés, alors au moins un de ces fermés contient un ouvert non vide.

Démonstration : Notons $\rho(x,y)$ la distance dans E et soit $\{A_n\}$ la suite de fermés telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$. Supposons qu'aucun A_n ne contienne un ouvert $\neq \emptyset$, alors $A_1 \neq E$ et $\complement A_1$ est ouvert, donc il contient une boule $S(p_1,\varepsilon_1)$ avec $\varepsilon_1 \in (0,1/2)$. Par hypothèse A_2 ne contient pas $S(p_1,\varepsilon_1/2)$, d'où $\complement A_2 \cap S(p_1,\varepsilon_1/2)$ contient une boule $S(p_2,\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_2 \in (0,\frac{1}{2^2})$. Par récurrence, on obtient une suite $\{S(p_n,\varepsilon_n)\}$ de boules telles que $\varepsilon_n \in (0,\frac{1}{2^n})$, $S(p_n,\varepsilon_n) \subset S(p_{n-1},\frac{\varepsilon_{n-1}}{2})$, $S(p_n,\varepsilon_n) \cap A_n = \emptyset$, $n=1,2,\ldots$

Maintenant, pour $n<m$, on a

$$\rho(p_n,p_m) \leq \rho(p_n,p_{n+1}) + \ldots + \rho(p_{m-1},p_m) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n},$$

d'où $\{p_n\}$ est une suite de Cauchy dans E qui converge donc vers p. Or, $\rho(p_n,p) \leq \rho(p_n,p_m) + \rho(p_m,p) < \varepsilon_n + \rho(p_m,p) \xrightarrow[m\to\infty]{} \varepsilon_n$, d'où $p \in S(p_n,\varepsilon_n)$ $\forall n$, et donc p n'appartient à aucun des A_n.
Ceci est en contradiction avec $p \in E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ∎

2) Principe de "majoration uniforme"

<u>Théorème général</u>. <u>Soient un Banach</u> E <u>et une famille</u> $\{p_i,\ i\in I\}$ <u>de fonctions continues non négatives définies sur</u> E <u>et telles que</u>

$$p_i(u'+u'') \leq p_i(u') + p_i(u''), \quad p_i(-u) = p_i(u).$$

<u>Si</u> $\{p_i(u),\ i\in I\}$ <u>est borné</u> $\forall u$ <u>fixé, alors</u> $\{p_i(u);\ i\in I\}$ <u>est uniformément borné pour</u> $\|u\|\leq 1$.

Démonstration : Soit $A_n = \{u\in E;\ p_i(u)\leq n,\ i\in I\}$. A_n est fermé puisque p_i est continue. Par hypothèse, pour $u\in E$, $\exists\, n\in\mathbb{N}$ tel que $p_i(u)\leq n,\ i\in I \implies u\in A_n$ et $E = \bigcup_{n=1} A_n$. D'après le théorème de Baire, au moins un A_n contient une boule $S(u_o,r)$. Mais, tout $u\in E$ tel que $\|u\|\leq 2r$ peut s'écrire sous la forme $u = u'-u''$ avec u', $u''\in S(u_o,r)$, car il suffit pour cela de prendre $u' = u_o + \frac{u}{2}$,

$u'' = u_o - \frac{u}{2}$. D'où, $p_i(u) \leq p_i(u') + p_i(u'') \leq 2n$ et $\{p_i(u),\ i \in I\}$ est uniformément borné pour $\|u\| \leq 2r$. Si $2r \geq 1$, le théorème est démontré. Si $2r<1$, soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m>1/2r$ alors

$\|u\| \leq 1 \implies \|u/m\| \leq 2r \implies p_i(\frac{u}{m}) \leq 2n \implies p_i(u) \leq 2mn$ et le théorème est démontré. ■

<u>Corollaire 1. Soit $\{u_n\}$ une suite de vecteurs de E telle que $\{(f,u_n)\}$ soit bornée pour tout $f \in E^*$ fixé. Alors $\{u_n\}$ est bornée</u> : $\|u_n\| \leq M$.

<u>Corollaire 2. Soit $\{f_n\}$ une suite de vecteurs de E^* telle que $\{(f_n,u)\}$ soit bornée pour tout $u \in E$ fixé. Alors $\{f_n\}$ est bornée</u> : $\|f_n\| \leq M$.

<u>Démonstration</u> : Pour le corollaire 2, il suffit de prendre $p_n(u) = |(f_n,u)|$ et d'appliquer le théorème précédent.

Pour le corollaire 1, il suffit de remplacer le E du théorème par E^*, et de poser $p_n(f) = |(f,u_n)|$. On applique ensuite le théorème général qui donne $|(f,u_n)| \leq M$ pour $\|f\| \leq 1$, ce qui à l'aide du corollaire, conséquence du théorème de Hahn-Banach donne $\|u_n\| \leq M$. ■

<u>Remarque</u>. Nous verrons plus loin une autre application du théorème de Baire : le théorème du "graphe fermé".

<u>Conséquence 1. Une suite $\{u_n\}$ faiblement convergente est bornée. Si ∃ une limite faible u , alors $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$. Si E est réflexif, ∃ toujours une limite faible.</u>

<u>Conséquence 2. Une suite $\{f_n\}$ faiblement* convergente est bornée et admet toujours une limite faible* $f \in E^*$, telle que $\|f\| \leq \liminf \|f_n\| < \infty$.</u>

(la faible* convergence de $\{f_n\}$ est définie par : $(u,f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{}$ limite pour tout $u \in E$, C'est une convergence plus faible que la convergence faible dans E^* , en général).

<u>Démonstration de l'inégalité</u> : On peut choisir f tel que $(u,f) = \lim(u_n,f)$ où $f \in E^*$ est tel que $\|f\|=1$ et $(u,f) = \|u\|$ (théorème de Hahn-Banach). D'où $\|u\| \leq \|u_n\| \implies \|u\| \leq \liminf \|u_n\|$.

-:-:-:-

II - Opérateurs linéaires dans les Banach.

-:-:-:-

Opérateurs linéaires dans les Banach.

I. Rappels et définitions.

1) Définitions.

Soit T un opérateur linéaire de E dans F, E et F étant des Banach. On note $D(T)$ le domaine de définition, qui est donc un sous-espace de E, et on note $R(T)$ le domaine des valeurs qui est un sous-espace de F. Enfin, on note $N(T)$ le noyau de $T = \{u \in E;\ Tu = 0\}$.

2) Rappels sur les opérateurs bornés.

Si T est continu en 0, alors T est continu dans tout $D(T)$. La continuité de T est équivalente à : $\exists M < \infty$ tel que $\|Tu\| \leq M\|u\|$ $\forall u \in D(T)$. Le plus petit nombre M tel que l'on ait l'inégalité précédente est appelé la norme de T : $\|T\|$. On dira aussi que T est borné. (On fera la démonstration dans le cas des applications multilinéaires continues). Par le principe d'extension, on peut dans ce cas étendre la définition de T à $\overline{D(T)}$ (fermeture de $D(T)$ dans E).

On note $\mathcal{L}(E;F)$, l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F (ici $D(T) = E$), et $\mathcal{L}(E;E) = \mathcal{L}(E)$. On sait, de manière classique, que $\mathcal{L}(E;F)$, muni de la norme définie plus haut, est un Banach.

3) Différentes notions de convergences (ordre de force décroissant).

Convergence uniforme (ou en norme) : c'est la convergence dans $\mathcal{L}(E;F)$:

$$T_n \longrightarrow T : \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E;F)} \longrightarrow 0 .$$

Convergence forte : $T_n \xrightarrow{s} T : \|T_n u - Tu\|_F \longrightarrow 0$ pour tout u fixé dans E (on note "s" comme "strong" car fort et faible commencent par un "f").

Convergence faible de $\{T_n\}$: $(T_n u, g)$ converge $\forall u \in E$, $g \in F^*$.

Si $T_n u$ a une limite faible Tu, $\forall u \in E$, on dit que $\{T_n\}$ a une limite faible T et on écrit $T_n \xrightarrow{w} T$ (w comme "weak").

4) Rayon spectral.

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, on note $\operatorname{spr} T = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ le rayon spectral de T. Si $\operatorname{spr} T = 0$, on dit que T est quasi-nilpotent.

Montrons que $\lim \|T^n\|^{1/n}$ existe et égale $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$.

Démonstration : On a

$$\|T^{m+n}\| \leqslant \|T^m\|.\|T^n\| \quad \text{et} \quad \|T^n\| \leqslant \|T\|^n \quad , \forall\, m,n \in \mathbb{N} .$$

Posons $a_n = \operatorname{Log}\|T^n\|$ et montrons que $\frac{a_n}{n} \longrightarrow b = \inf_{n\in\mathbb{N}-\{o\}} \frac{a_n}{n}$.

On a donc : $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ et, pour m fixé, $n = mq+r$, $0 \leqslant r < m$, d'où $a_n \leqslant qa_m + a_r$ $(a_{mq} \leqslant qa_m)$, et $\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{q}{n} a_m + \frac{a_r}{n}$.

Si $n \longrightarrow \infty$ pour m fixé $\frac{q}{n} \longrightarrow \frac{1}{m}$, d'où

$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_m}{m}$, mais, m est arbitraire $\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \inf_{m\in\mathbb{N}-\{o\}} \frac{a_m}{m} = b$.

D'autre part, $\frac{a_n}{n} \geqslant b$, d'où $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \geqslant b$ et il en résulte :

$$\lim\inf = \lim\sup = \lim = \inf . \quad \blacksquare$$

5) Opérateur adjoint de $T \in \mathcal{L}(E;F)$.

$\forall\, g \in F^*$, la forme $u \longrightarrow (g,Tu)$ est anti-linéaire bornée sur E, puisque $|(g,Tu)| \leqslant \|g\|.\|Tu\| \leqslant \|T\|.\|g\|.\|u\|$. On définit donc $f \in E^*$ tel que $(f,u) = (g,Tu)$ et on définit T^* par

$$T^*g = f .$$

On a alors $\|T^*g\| = \|f\| = \sup_{\|u\|\leqslant 1} |(f,u)| \leqslant \|T\|.\|g\| \Longrightarrow \|T^*\| \leqslant \|T\|$, d'où $T^* \in \mathcal{L}(F^*;E^*)$, la linéarité étant évidente.

Montrons que $\|T^*\| = \|T\|$:

Démonstration : On a, de la même façon que ci-dessus $\|T^{**}\| \leqslant \|T^*\| \leqslant \|T\|$. Mais, si on identifie E à un sous-espace de E^{**}, on a $\forall\, u \in E$, $g \in F^*$

$$(T^{**}u,g) = (u,T^*g) = \overline{(T^*g,u)} = \overline{(g,Tu)} ,$$

d'où, la forme anti-linéaire $T^{**}u$ sur F^* est identifiable à $Tu \in F \implies T^{**} \supset T$ (prolongement de T). Il en résulte que $\|T^{**}\| \geq \|T\|$, d'où finalement $\|T^*\| = \|T\|$. ■

II. Opérateurs compacts.

1) Définition. Soit $T \in \mathcal{L}(E;F)$, on dira que T est compact si l'image $\{Tu_n\}$ d'une suite $\{u_n\}$ bornée de E, contient une sous-suite convergente.

On note $\mathcal{L}_o(E;F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{L}(E;F)$.

2) Propriétés de $\mathcal{L}_o(E;F)$.

Théorème 1. $\mathcal{L}_o(E;F)$ est un sous-espace fermé du Banach $\mathcal{L}(E;F)$.

Démonstration : On montre aisément que si $T, T', T'' \in \mathcal{L}_o(E;F)$ alors $\alpha T \in \mathcal{L}_o(E;F)$ et $T' + T'' \in \mathcal{L}_o(E;F)$. Montrons que $\mathcal{L}_o(E;F)$ est fermé.

Soit $\{T_n\}$ une suite d'opérateurs compacts tels que $\|T_n - T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, où $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Montrons que T est compact.

Soit donc une suite $\{u_n\}$ bornée de E, on peut alors extraire une sous-suite $\{u_n^{(1)}\}$ telle que $\{T_1 u_n^{(1)}\}$ converge dans F ; on peut ensuite extraire une suite $\{u_n^{(2)}\}$ de $\{u_n^{(1)}\}$ telle que $\{T_2 u_n^{(2)}\}$ converge dans F et ainsi de suite. On considère alors la suite diagonale $\{v_n = u_n^{(n)}\}$; $\{v_n\}$ est une sous-suite de chaque $\{u_n^{(k)}\}$, k fixé, donc $\{T_k v_n\}$ converge dans F.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ k tel que $\|T_k - T\| < \varepsilon$ et $\exists N$ tel que $\|T_k v_n - T_k v_{n+p}\| < \varepsilon$ pour $n > N$, $p > 0$. Alors

$$\|T v_n - T v_{n+p}\| \leq \|(T - T_k)(v_n - v_{n+p})\| + \|T_k(v_n - v_{n+p})\| \leq (2M+1)\varepsilon ,$$

pour $M = \sup\|u_n\|$. D'où $\{T v_n\}$ converge et T est bien compact. ■

Théorème 2. Le produit d'un opérateur compact par un opérateur borné est compact.

$T \in \mathcal{L}_o(E;F)$, $A \in \mathcal{L}(F;G)$, $B \in \mathcal{L}(H;E) \implies AT \in \mathcal{L}_o(E;G)$, $TB \in \mathcal{L}_o(H;F)$.

La démonstration est laissée au lecteur (prendre une suite $\{u_n\}$ bornée).

Remarque. Si l'on considère des opérateurs de $\mathcal{L}(E)$, on peut dire que $\mathcal{L}_o(E)$ est un idéal bilatère fermé de l'Algèbre de Banach $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 3. L'adjoint d'un opérateur compact est compact : $T \in \mathcal{L}_o(E;F) \Longrightarrow T^* \in \mathcal{L}_o(F^*;E^*)$.

Démonstration : Notons S et S^* les boules unités fermées dans E et F^* respectivement. Soit $T \in \mathcal{L}_o(E,F)$ et soit $\{f_n\}$ une suite $\in S^*$. Puisque l'on a $|(f_n,y)-(f_n,z)| \leq \|y-z\|_F$, $n=1,2,\ldots,$ il en résulte, d'après le théorème d'Ascoli, que l'on peut extraire une sous-suite $f_n^{(1)}$ telle que $(f_n^{(1)},y)$ converge uniformément pour $y \in$ compact $\overline{TS}$ (en effet $\{f_n\}$ forme une famille équicontinue de fonctions du compact $\overline{TS}$ dans un borné de $\mathbb{C}$). Donc, $(f_n^{(1)},Tx) = (T^*f_n^{(1)},x)$ converge uniformément pour $x \in S$. D'où, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que

$$|(T^*f_n^{(1)} - T^*f_m^{(1)},x)| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad n \text{ et } m > N \text{ et } \|x\| \leq 1 .$$

Or $\|T^*f_n^{(1)} - T^*f_m^{(1)}\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |(T^*f_n^{(1)} - T^*f_m^{(1)},x)| \leq \varepsilon$, $n,m \geq N$, d'où $T^*f_n^{(1)}$ converge dans E^* et T^* est compact. ∎

III. Opérateurs fermés.

1) Généralités sur les opérateurs non bornés.

Si l'on considère deux opérateurs linéaires S et T de E dans F, leurs domaines $D(S)$ et $D(T)$ n'étant plus nécessairement E tout entier, on doit faire la convention suivante :

$$D(\alpha S+\beta T) = D(S) \cap D(T) .$$

Il peut arriver que le domaine intersection soit réduit à 0. Néanmoins, on peut montrer que

$$OT \subset O , \quad O + T = T + O = T$$

$$(R+S) + T = R + (S+T) , \quad S + T = T + S , \quad (S+T) - T \subset S .$$

Le domaine de TS est par définition : $D(TS) = \{u \in D(S)$ tels que

$Su \in D(T)\}$, d'où $D(TS) = S^{-1}\{D(T)\}$. On montre alors, que $(TS)R = T(SR)$, $(T_1+T_2)S = T_1S + T_2S$, $T(S_1+S_2) \supset TS_1 + TS_2$.
Si T est inversible de E dans F , alors $T^{-1}T \subset \mathbb{1}_E$, $TT^{-1} \subset \mathbb{1}_F$.

2) Opérateurs fermés.

Norme dans $E \times F$: On choisira dorénavant la norme suivante : $\|[u,v]\| = \{\|u\|_E^2 + \|v\|_F^2\}^{1/2}$.

L'avantage de ce choix est que l'on a alors un isomorphisme isométrique entre $(E \times F)^*$ et $E^* \times F^*$ (espaces que nous identifierons) ($\|(f,g)\|_{E^* \times F^*} = \{\|f\|^2 + \|g\|^2\}^{1/2}$) .

Démonstration : i) $\forall\ [f,g] \in E^* \times F^*$, on définit $F \in (E \times F)^*$ par $(F,[u,v]) = (f,u)+(g,v)$.
Réciproquement tout $F \in (E \times F)^*$ s'exprime de façon unique sous la forme $[f,g] \in E^* \times F^*$ grâce à : $(f,u) = (F,[u,0])$ et $(g,v) = (F,[0,v])$

ii) On a $\|F\| = \|[f,g]\| = (\|f\|^2 + \|g\|^2)^{1/2}$:

En effet $|([f,g],[u,v])| \leq \|f\|.\|u\| + \|g\|.\|v\| \leq \|[u,v]\|.\{\|f\|^2 + \|g\|^2\}^{1/2}$, et, pour $[f,g]$ fixé, $\forall\ \varepsilon$ donné > 0 , $\exists\ [u,v]$ tel que $\|u\| = \|f\|$, $\|v\| = \|g\|$, $(f,u) \geq (1-\varepsilon)\|f\|^2$, $(g,v) \geq (1-\varepsilon)\|g\|^2$, d'où

$$([f,g],[u,v]) \geq (1-\varepsilon)(\|f\|^2 + \|g\|^2) .$$

ε étant arbitraire, on a bien $\|[f,g]\|_{(E \times F)^*} = (\|f\|^2 + \|g\|^2)^{1/2}$. ∎

Soit maintenant T un opérateur linéaire de E dans F , nous notons $G(T)$ son graphe : $\{[u,Tu]\,;u \in D(T)\}$ qui est un sous-espace de $E \times F$.

Définition. On dit que T est un opérateur fermé si $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.
On note $\mathfrak{F}(E;F)$, l'espace des opérateurs fermés de E dans F .

3) Propriétés élémentaires*.

(a) Si on a une suite $\{u_n\}$ telle que $u_n \in D(T)$ avec $u_n \to u$ dans E et $Tu_n \to v$ dans F , alors on en conclut : $u \in D(T)$ et $v = Tu$ (propriété équivalente à la définition).

---

* $N(T)$ est fermé car $N(T) \times \{0\} = G(T) \cap (E \times \{0\})$ est fermé dans $E \times F$.

(b) Si $T \in \mathcal{L}(E;F)$ alors $T \in \mathcal{F}(E;F)$.
Un opérateur borné plus général $(D(T) \not\equiv E)$ est fermé si et seulement si $D(T)$ est fermé.

(c) Adoptons un formalisme utile, à l'aide des graphes. On a vu que $G(T) \subset E \times F$, on note : $G'(T) = \{[Tu,u] ; u \in D(T)\} \subset F \times E$, alors si T est inversible :

$$G(T^{-1}) = G'(T) ,$$

d'où T fermé $\Longleftrightarrow$ T^{-1} fermé.

4) Théorème du graphe fermé (application du Théorème de Baire).
Si $T \in \mathcal{F}(E;F)$ et $D(T) = E$, alors $T \in \mathcal{L}(E;F)$.

Démonstration : Soit U l'image réciproque par T de la boule unité ouverte de F (en fait on considère l'image réciproque de $R(T) \cap \overset{\circ}{S}_F$). On ne sait pas a priori si U est ouvert ou non. Mais, puisque $D(T) = E$, E est la réunion de U , $2U$, $3U$, ... D'après le théorème de Baire, $\exists$ N tel que $N\bar{U}$ contienne une boule K de centre u_o , de rayon r .

Tout $u \in E$ avec $\|u\| < 2r$ peut s'écrire $u = u'-u''$ avec u' et $u'' \in K$ (cf. démonstration du principe de majoration uniforme). Mais puisque $K \subset N\bar{U}$, $\exists$ des suites $\{u_n'\}$, $\{u_n''\} \subset NU$ telles que $u_n' \longrightarrow u'$, $u_n'' \longrightarrow u''$. On a alors :

$$\|T(u_n'-u_n'')\| \leqslant \|Tu_n'\| + \|Tu_n''\| < 2N ,$$

d'où $u_n'-u_n'' \in 2NU$ et $u = \lim(u_n'-u_n'') \in 2N\bar{U}$.
Il en résulte que $\forall \lambda > 0$, si $\|u\| < \lambda r$ alors $u \in \lambda N\bar{U}$.

Soit maintenant $u \in E$ tel que $\|u\| < r$ et $\varepsilon \in (0,1)$, alors $u \in N\bar{U}$ et $\exists$ $u_1 \in NU$ tel que $\|u-u_1\| < \varepsilon r$ et $\|Tu_1\| < N$ (par définition de NU) . D'où, $u-u_1 \in \varepsilon N\bar{U}$ et $\exists$ $u_2 \in \varepsilon NU$ tel que $\|u-u_1-u_2\| < \varepsilon^2 r$, $\|Tu_2\| < \varepsilon N$. On itère le processus et l'on construit ainsi une suite $\{u_n\}$ telle que

$$\|u-u_1-u_2- \dots - u_n\| < \varepsilon^n r , \quad \|Tu_n\| < \varepsilon^{n-1} N , \quad n=1,2,\dots$$

Posons $w_n = u_1 + \dots + u_n$, alors $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ et

$$\|Tw_n - Tw_{n+p}\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|Tu_k\| < (\varepsilon^n + \dots + \varepsilon^{n+p-1})N \leqslant \frac{\varepsilon^n N}{1-\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

d'où $Tw_n \longrightarrow v$ et, comme T est fermé, $v = Tu$.

Mais, puisque $\|Tw_n\| < (1+\varepsilon+\dots)N = \frac{N}{1-\varepsilon}$, on a $\|Tu\| \leq \frac{N}{1-\varepsilon}$ vrai $\forall\ u \in E$ tel que $\|u\| < r$. Donc T est borné, et comme ε est arbitraire, on a aussi $\|T\| \leq \frac{N}{r}$. $\blacksquare$

<u>Application élémentaire</u>.

<u>Si</u> $T \in \mathcal{F}(E;F)$, T <u>inversible et</u> $R(T) = F$ <u>alors</u>, $T^{-1} \in \mathcal{L}(F;E)$.

En effet, on sait d'après le 3)(c) que $T^{-1} \in \mathcal{F}(F;E)$, il suffit alors d'appliquer le théorème précédent. $\blacksquare$

5) <u>Application aux projections</u>.

<u>Définition</u>. <u>Une projection</u> P <u>est un opérateur linéaire borné dans</u> E , <u>tel que</u> $P^2 = P$.

On associe à P la décomposition de l'espace E :

$$E = M \oplus N \quad \text{où} \quad M = PE \quad \text{et} \quad N = (\mathbb{1}-P)E ,$$

(on montrerait immédiatement que si $u \in M \cap N$ alors $u=0$). Les sous-espaces M et N sont fermés dans E , car ce sont les noyaux de P et $\mathbb{1}-P \in \mathcal{L}(E)$.

Réciproquement, si l'on a $E = M \oplus N$ avec M et N fermés, on définit une projection P sur M parallèlement à N par :

$$\forall u \in E \ , \ u = u'+u'' \quad \text{avec} \quad u' \in M \ , \ u'' \in N \quad \text{et} \quad Pu = u' .$$

Il est immédiat de voir que P est linéaire dans E . Montrons que P est borné à l'aide du théorème du graphe fermé. Soit $\{u_n\}$ une suite telle que $u_n \longrightarrow u$, $Pu_n \longrightarrow v$. Puisque $Pu_n \in M$ fermé, $v \in M$. Puisque $(\mathbb{1}-P)u_n \in N$ fermé, $u-v = \lim(u_n - Pu_n) \in N$. D'où $Pu = v$ par définition de P et P est fermé. Or $D(P) \equiv E$, donc $P \in \mathcal{L}(E)$. $\blacksquare$

6) <u>Opérateur adjoint</u>.

Soient un opérateur T de E dans F et un opérateur S de F^* dans E^* ; T et S sont dits "adjoints" entre eux si

$$(1) \qquad (g,Tu) = (Sg,u) \ , \ u \in D(T) \ , \ g \in D(S) .$$

Pour un opérateur T de E dans F, il y a en général un grand nombre d'opérateurs adjoints, mais si T a un domaine dense, il existe un adjoint maximal unique T^*. On dira que T^* est "l'adjoint" de T et tout autre adjoint S ne sera qu'une restriction de T^*.

Construction de T^*.

$$D(T^*) = \{g \in F^* ; \exists f \in E^* \text{ tel que } (g,Tu) = (f,u) , \forall u \in D(T)\} .$$

$f \in E^*$ est unique, pour g fixé, car $(f,u) = (f',u) \ \forall u \in D(T) \Rightarrow f = f'$ puisque $D(T)$ est dense dans E. On définit donc bien un opérateur T^* de F^* dans E^* en posant $T^*g = f$. Il est évident que T^* est linéaire ; de plus $\forall S$ adjoint de T, on a $S \subset T^*$ et T^* est lui-même adjoint de T.

Montrons que $T^* \in \mathcal{F}(F^*;E^*)$ à l'aide du formalisme sur les graphes.

Démonstration : Si S est un adjoint de T, on a

$$(-Sg,u) + (g,Tu) = 0 ,$$

d'où $[u,Tu] \perp [-Sg,g]$ avec $[u,Tu] \in G(T) \subset E \times F$ et $[-Sg,g] \in G'(-S) \subset E^* \times F^* = (E \times F)^*$ (cf. 2)).
La définition de T^* montre que $G'(-T^*) = G(T)^{\perp}$ qui est donc fermé dans $(E \times F)^*$. D'où, T^* est fermé, même si T ne l'est pas. ∎

Autres propriétés.

(a). On montrerait aisément que $N(T^*) = R(T)^{\perp}$.

(b). Montrons maintenant le

Théorème. Soit $T \in \mathcal{F}(E;F)$ avec $D(T)$ dense dans E. Si T^{-1} existe et $\in \mathcal{L}(F;E)$, alors $(T^*)^{-1}$ existe et $\in \mathcal{L}(E^*;F^*)$. De plus, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Réciproquement, si $(T^*)^{-1}$ existe et $\in \mathcal{L}(E^*;F^*)$, alors T^{-1} existe et $\in \mathcal{L}(F;E)$.

Démonstration : Soit $T^{-1} \in \mathcal{L}(F;E)$, alors $(T^{-1})^* \in \mathcal{L}(E^*;F^*)$, $\forall g \in D(T^*) \subset F^*$ et $\forall v \in F$ on a

$$((T^{-1})^* T^* g, v) = (T^* g, T^{-1} v) = (g, TT^{-1} v) = (g,v) ;$$

d'où $(T^{-1})^* T^* g = g$.

D'autre part, $\forall f \in E^*$ et $\forall u \in D(T) \subset E$, on a :

$$((T^{-1})^* f, Tu) = (f, T^{-1}Tu) = (f,u) \ ;$$

d'où $(T^{-1})^* f \in D(T^*)$ et $T^*(T^{-1})^* f = f$ par définition de T^*.
On a donc bien montré que $(T^*)^{-1}$ existe et que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

<u>Réciproquement</u>, soit $(T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E^*;F^*)$. $\forall f \in E^*$ et $u \in D(T)$, on a

$$((T^*)^{-1} f, Tu) = (T^*(T^*)^{-1} f, u) = (f,u) \ .$$

Mais, d'après Hahn-Banach, $\forall u \in E$, $\exists f \in E^*$ tel que $\|f\|=1$ et $(f,u) = \|u\|$. Pour cet f , on a alors

$$\|u\| = ((T^*)^{-1} f, Tu) \leq \|(T^*)^{-1}\| . \|Tu\| ,$$

ce qui implique que T est inversible avec $\|T^{-1}\| \leq \|(T^*)^{-1}\|$. Puisque T^{-1} est fermé et borné, $D(T^{-1}) = R(T)$ est fermé (cf. 3)(b)).
Or, l'on a $R(T)^{\perp} = N(T^*) = \{0\} \implies R(T) = F$ et $T^{-1} \in \mathcal{L}(F;E)$. ∎

-:-:-:-

<u>Exercices.</u>

1. Soit $E = L^2(\Omega)$ où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Soit l'opéra- $u \longrightarrow Tu$ défini par :

$$(Tu)(y) = \int_\Omega k(y,x)u(x)dx$$

où k est continu sur $\bar{\Omega}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $T \in \mathcal{L}[L^2(\Omega)]$ (appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

b) Montrer que $T \in \mathcal{L}_o[L^2(\Omega)]$ (appliquer le théorème d'Ascoli et le fait que l'application identique est continue de $C^0(\bar{\Omega})$ dans $L^2(\Omega)$).

c) Montrer que l'on a les mêmes résultats a) et b), dans le cas où $(x,y) \longrightarrow k(y,x)$ est mesurable sur Ω^2 et $\in L^2(\Omega^2)$ (appliquer le théorème de Fubini et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour retrouver a), puis utiliser la densité de $C^0(\bar{\Omega}^2)$ dans $L^2(\Omega^2)$ pour retrouver b), en appliquant le théorème 1).

d) Montrer que l'adjoint T^* de T est défini par

$$(T^*u)(y) = \int_\Omega \overline{k(x,y)}u(x)dx.$$

2. Soit $E = L^2(0,1)$ et soit $D(T) = \{u \in E \; ; \frac{du}{dx} \in E, \; u(0)=0\}$ où il est sous-entendu que l'on prend le représentant u, dans la classe, qui est continu pour définir $u(0)$, et où la dérivée est prise au sens des distributions .

Soit alors l'opérateur $u \longrightarrow Tu = \frac{du}{dx}$ pour $u \in D(T)$.

a) Montrer que T est fermé dans E.

b) Refaire la démonstration dans le cas où $E = C^0[0,1]$.

c) Dans le cas où $E = L^2(0,1)$, montrer que l'adjoint de T est défini par :

$$D(T^*) = \{u \in E \; ; \frac{du}{dx} \in E, \; u(1) = 0\} \text{ et } T^*u = -\frac{du}{dx}.$$

(On suppose $g \in D(T^*)$ et on pose $h(x) = -\int_x^1 (T^*g)(t)\,dt$; on arrive à : $\forall u \in D(T), \int_0^1 (g+h)\frac{d\bar{u}}{dx}dx = 0$, d'où le résultat).

-:-:-:-

III - Résolvantes et spectres.

-:-:-:-

Résolvantes et spectres.

I. Définitions.

1) Commutativité et décomposition.

Si T et $S \in \mathcal{L}(E)$, T et S commutent si et seulement si $ST = TS$. Dans le cas des opérateurs non-bornés, il faut faire attention à cause des domaines.

Si $A \in \mathcal{L}(E)$ et T est simplement linéaire, on dit qu'ils commutent si et seulement si :

$$AT \subset TA \,, \tag{1}$$

ce qui signifie que $\forall\, u \in D(T)$, $Au \in D(T)$ et $TAu = ATu$.
Montrons que si T est inversible et commute avec $A \in \mathcal{L}(E)$, alors T^{-1} commute avec A : $AT^{-1} \subset T^{-1}A$.

Démonstration : Soit $u \in D(T^{-1}) = R(T)$, alors $T^{-1}u \in D(T)$ et $AT(T^{-1}u) = TA(T^{-1}u)$; d'où $Au = TAT^{-1}u \in R(T)$ et $T^{-1}Au = AT^{-1}u$. ∎

Soit maintenant une décomposition de l'espace $E = M \oplus N$; T sera dit "décomposé" si

$$PD(T) \subset D(T) \,,\ TM \subset M \,,\ TN \subset N \tag{2}$$

où P est la projection sur M parallèlement à N . Ceci est équivalent à :

$$PT \subset TP \,. \tag{3}$$

Démonstration : (2) implique que $\forall\, u \in D(T)$, $Pu \in D(T)$ et $TPu \in M$, $T(\mathbb{1}-P)u \in N$. D'où $(\mathbb{1}-P)TPu = 0$ et $PT(\mathbb{1}-P)u = 0$. Il vient alors $TPu = PTPu = PTu$. On montrerait de même que (3) implique (2). ∎

On notera T_M et T_N les parties de T relatives à M et N respectivement. M étant fermé dans E , T_M est un opérateur linéaire dans le Banach M . Si T est fermé, alors T_M est fermé car $G(T_M) = G(T) \cap M \times M$. Si $D(T)$ est dense, alors $D(T_M) = D(T) \cap M$ est dense dans M.

2) Résolvante - Ensemble résolvant - Spectre.

On suppose dans tout ce qui suit que T est fermé dans E.

$$T \in \mathcal{F}(E) \text{ , alors } \forall \zeta \in \mathbb{C} \text{ , } (\zeta \mathbb{1} - T) \in \mathcal{F}(E) \text{ .}$$

Ensemble résolvant $\rho(T)$.

$$\zeta \in \rho(T) \iff \zeta \mathbb{1} - T \text{ inversible et } (\zeta \mathbb{1} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \text{ .}$$

Résolvante de T : $R(\zeta;T)$ ou $R(\zeta)$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

$$R(\zeta;T) = (\zeta \mathbb{1} - T)^{-1} \text{ , } \zeta \in \rho(T) \text{ .}$$

$$D(R(\zeta;T)) = E \text{ , } R(R(\zeta;T)) = D(T) \text{ , } \forall \zeta \in \rho(T) \text{ .}$$

Spectre de T : $\sigma(T)$.

C'est le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$.

II. Propriétés de $\rho(T)$ et de $\sigma(T)$.

1) Propriétés générales.

La résolvante $R(\zeta)$ satisfait "l'équation résolvante" :

(1) $$R(\zeta_o) - R(\zeta) = (\zeta - \zeta_o) R(\zeta_o) R(\zeta) \text{ .}$$

Démonstration : On remarque d'abord que

$$R(\zeta) T \subset T R(\zeta) = -\mathbb{1} + \zeta R(\zeta) \in \mathcal{L}(E) \quad \text{(facile*)} \text{ ,}$$

puis on a

$$R(\zeta_o) - R(\zeta) = R(\zeta_o)(\zeta - T) R(\zeta) - R(\zeta_o)(\zeta_o - T) R(\zeta) = (\zeta - \zeta_o) R(\zeta_o) R(\zeta) \text{ .}$$

Mais, de (1) on déduit, si $|\zeta - \zeta_o| < \|R(\zeta_o)\|^{-1}$, que l'on a

$$R(\zeta) = [1 + (\zeta - \zeta_o) R(\zeta_o)]^{-1} R(\zeta_o) \text{ ,}$$

ce qui peut encore s'écrire :

(2) $$R(\zeta) = \sum_{k=o}^{\infty} [-(\zeta - \zeta_o) R(\zeta_o)]^k R(\zeta_o) \text{ ,}$$

* Par suite des propriétés de l'inverse de $\zeta - T$.

série qui converge dans $\mathcal{L}(E)$. Il en résulte :

<u>Théorème</u>. <u>L'ensemble résolvant</u> $\rho(T)$ <u>est ouvert dans</u> $\mathbb{C}$, <u>tandis que le spectre</u> $\sigma(T)$ <u>est fermé</u>. <u>La résolvante</u> $R(\zeta)$ <u>est holomorphe dans</u> $\rho(T)$ <u>et</u> $\|R(\zeta)\| \geqslant [\mathrm{dist}(\zeta,\sigma(T))]^{-1}$.

<u>Démonstration</u> : En effet, si $\zeta_o \in \rho(T)$ et si $|\zeta-\zeta_o| < \|R(\zeta_o)\|^{-1}$ alors $\zeta \in \rho(T)$ et $|\zeta-\zeta_o| < \mathrm{dist}(\zeta_o,\sigma(T))$. D'où $\|R(\zeta_o)\|^{-1} \leqslant \mathrm{dist}(\zeta_o,\sigma(T))$. ∎

<u>Caractérisation du spectre</u> $\sigma(T)$.

$\sigma_p(T) = \{\zeta \in \sigma(T);\ \zeta\mathbb{1}-T$ n'est pas inversible$\}$; c'est le spectre "ponctuel" ou l'ensemble des valeurs propres.

$\sigma_c(T) = \{\zeta \in \sigma(T);\ \zeta\mathbb{1}-T$ est inversible et $R(\zeta\mathbb{1}-T)$ est dense dans E mais $\neq E\}$; c'est le spectre "continu" de T .

$\sigma_r(T) = \{\zeta \in \sigma(T);\ \zeta\mathbb{1}-T$ est inversible et $R(\zeta\mathbb{1}-T)$ n'est pas dense dans $E\}$; c'est le spectre "résiduel" de T .

On a $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ (démonstration laissée au lecteur).

2) <u>Spectre des opérateurs bornés</u>.

<u>Théorème</u>. <u>Le spectre de</u> $T \in \mathcal{L}(E)$ <u>est fermé, borné, non vide dans</u> $\mathbb{C}$. <u>De plus</u>, $\sup|\sigma(T)| = \mathrm{spr}(T)$ (cf. §.I.4) du chapitre 2), <u>et pour</u> $|\zeta| > \mathrm{spr}(T)$ <u>la série</u> $R(\zeta;T) = \sum_{n=o}^{\infty} T^n/_{\zeta^{n+1}}$ <u>converge dans</u> $\mathcal{L}(E)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $R'(\zeta) = \sum_{n=o}^{\infty} T^n/_{\zeta^{n+1}}$, la série converge dans $\mathcal{L}(E)$ si $|\zeta| > \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \mathrm{spr}(T)$. On vérifie alors, que

$$R'(\zeta)(\zeta\mathbb{1}-T) = (\zeta\mathbb{1}-T)R'(\zeta) = \mathbb{1} \text{ , pour } |\zeta| > \mathrm{spr}(T) .$$

Il en résulte que $R'(\zeta) = R(\zeta;T)$ et que $\sup|\sigma(T)| = \mathrm{spr}(T)$ car le domaine d'analyliticité de $R(\zeta;T)$ étant $\rho(T)$, la série de Laurent devra avoir le domaine de convergence $|\zeta| > \sup|\sigma(T)|$.

Montrons maintenant que $\sigma(T) \neq \emptyset$. Si $\sigma(T) = \emptyset$, alors $R(\zeta;T)$

est une fonction entière, analytique à l'infini ; c'est donc une constante. Donc, le coefficient de ζ^{-1} dans le développement doit être nul, et il y a contradiction. ∎

3) Spectre des opérateurs fermés.

Lemme. Si $T \in \mathcal{F}(E)$ et $\rho(T)$ contient l'extérieur d'un cercle dans $\mathbb{C}$, alors : soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et $R(\zeta)$ est holomorphe à l'infini avec $R(\infty) = 0$, soit $R(\zeta)$ a une singularité essentielle à l'infini.

Démonstration : Supposons que ∞ ne soit pas une singularité essentielle pour $R(\zeta)$. On a donc pour $|\zeta|$ assez grand,

$$R(\zeta) = \zeta^k A + \zeta^{k-1} B + \ldots \quad \text{avec } A, B, \ldots \in \mathcal{L}(E) , \quad A \neq 0 .$$

Alors

$$TR(\zeta) = \zeta R(\zeta) - \mathbb{1} = -\mathbb{1} + \zeta^{k+1} A + \zeta^k B + \ldots ,$$

et si $k \geq 0$, $\zeta^{-(k+1)} R(\zeta) \xrightarrow[\zeta \to \infty]{} 0$, $T\zeta^{-(k+1)} R(\zeta) \xrightarrow[\zeta \to \infty]{} A$.

Cela implique $A = 0$ puisque T est fermé ($\forall u$, $Au = 0$) et il y a contradiction, d'où $k \leq -1$ et $R(\zeta) \xrightarrow[\zeta \to \infty]{} 0$, $TR(\zeta) \xrightarrow[\zeta \to \infty]{} -\mathbb{1} + (\lim \zeta^{k+1})A$

Comme T est fermé, cela entraîne que

$$\mathbb{1} = (\lim \zeta^{k+1}) A \Longrightarrow k = -1 \text{ et } A = 1 .$$

D'où $\zeta R(\zeta) u \longrightarrow u$ et $T \zeta R(\zeta) u \longrightarrow Bu$ $\forall u \in E$.

Comme T est fermé, on aura $u \in D(T)$ et $Bu = Tu$, d'où $T \in \mathcal{L}(E)$. ∎

On note dans la suite $\tilde{\sigma}(T) = \sigma(T) \cup \{\infty\}$ si $T \notin \mathcal{L}(E)$, sinon (si $T \in \mathcal{L}(E)$) $\tilde{\sigma}(T) = \sigma(T)$.

Théorème. Si $T \in \mathcal{F}(E)$ est inversible, alors $\tilde{\sigma}(T)$ et $\tilde{\sigma}(T^{-1})$ se correspondent par $\zeta \longrightarrow \zeta^{-1}$ dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Démonstration : Soit $0 \neq \zeta \in \rho(T)$ et posons $S(\zeta) = TR(\zeta) = -\mathbb{1} + \zeta R(\zeta) \in \mathcal{L}(E)$

$\forall u \in E$, $S(\zeta)u = TR(\zeta)u$ et $T^{-1}S(\zeta)u = R(\zeta)u = \zeta^{-1}[\mathbb{1} + S(\zeta)]u$.

D'où $\zeta(T^{-1} - \zeta^{-1})S(\zeta)u = u$ et $R(T^{-1} - \zeta^{-1}\mathbb{1}) = E$.

De plus, l'opérateur $(T^{-1} - \zeta^{-1}\mathbb{1})$ est inversible car :

$$(T^{-1} - \zeta^{-1})v = 0 \Longrightarrow v = \zeta T^{-1} v \Longrightarrow Tv = \zeta v \Longrightarrow v = 0 .$$

D'où, $(T^{-1}-\zeta^{-1}\mathbb{1})^{-1} = \zeta S(\zeta) \in \mathcal{L}(E)$ et $\zeta^{-1} \in \rho(T^{-1})$.

Si $0 \in \rho(T)$, $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et $\infty = 0^{-1} \in \tilde{\rho}(T^{-1})$ par définition.

Si $\infty \in \tilde{\rho}(T)$, alors $T \in \mathcal{L}(E)$ et $[0-T^{-1}]^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, d'où $0 = \infty^{-1} \in \rho(T^{-1})$. ∎

III. Séparation du spectre.

On suppose dans ce paragraphe que le spectre $\sigma(T)$, de $T \in \mathcal{F}(E)$, contient une partie bornée σ' séparée du reste σ'' de sorte qu'il existe une courbe fermée Γ simple rectifiable (ou un nombre fini de telles courbes) qui entoure un voisinage de σ' , σ'' étant à l'extérieur. On va montrer :

1) Théorème important. Soit $\sigma(T)$ séparé en $\sigma' \cup \sigma''$ de la manière décrite ci-dessus. Alors on a une décomposition de T associée à la décomposition $E = M' \oplus M''$ de l'espace (au sens du §.1), telle que les spectres de $T_{M'}$ et $T_{M''}$ coïncident respectivement avec σ' et σ'', et $T_{M'} \in \mathcal{L}(M')$.

Démonstration : On pose

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\zeta)\, d\zeta \in \mathcal{L}(E) .$$

Montrons que P est une projection : $P^2 = P$.

Γ' étant une courbe frontière d'un voisinage de σ' contenant Γ et extérieur à σ'' , on a

$$P^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \int_{\Gamma'} R(\zeta)\, R(\zeta')\, d\zeta\, d\zeta' = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \int_{\Gamma'} \frac{R(\zeta)-R(\zeta')}{\zeta'-\zeta}\, d\zeta\, d\zeta'$$

d'après l'identité (II.(1)). Puis, en remarquant que l'on peut changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale double et que l'on a

$$\int_{\Gamma'} \frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta} = 2\pi i \quad \text{et} \quad \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta'-\zeta} = 0 ,$$

on arrive à

$$P^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\zeta)\, d\zeta = P .$$

P projette E sur un sous-espace fermé M' parallèlement à $M'' = (\mathbb{1}-P)E$. De plus, $PR(\zeta) = R(\zeta)P$, $\forall \zeta \in \rho(T)$, puisque $R(\zeta_1)$ et $R(\zeta_2)$ commutent (§.II.1)). Il en résulte d'après la propriété citée au §.I.1)) que P et T commutent : $PT \subset TP$, et donc que les opérateurs $T_{M'}$ et $T_{M''}$ dont définis.

De plus, si $\zeta \in \rho(T)$, il est facile de voir que $(\zeta\mathbb{1}-T_{M'})^{-1} = R_{M'}(\zeta)$ dans M' (même chose pour M'') , d'où $\rho(T) \subset \rho(T_{M'})$ et $\rho(T) \subset \rho(T_{M''})$. Montrons que $\rho(T_{M'})$ contient aussi σ'' .

$\forall \zeta \in \rho(T)$ et $\zeta \notin \Gamma$, on a

$$R(\zeta)P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\zeta)\, R(\zeta')\, d\zeta' = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(\zeta)-R(\zeta')}{\zeta-\zeta'}\, d\zeta' .$$

Si ζ est en dehors du domaine de frontière Γ , on a

$$R(\zeta)P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(\zeta')}{\zeta-\zeta'}\, d\zeta'$$

expression qui est holomorphe en dehors du domaine de frontière Γ . D'où, $R(\zeta)P$, et donc $R_{M'}(\zeta)$ dans M' , ont un prolongement analytique dans tout l'extérieur de Γ . $\rho(T_{M'})$ contient donc l'extérieur de Γ et en particulier σ'' . Il en résulte que $\sigma(T_{M'}) \subset \sigma'$.

De même, si ζ est à l'intérieur du domaine de frontière Γ , on a

$$R(\zeta)P = R(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(\zeta')}{\zeta-\zeta'}\, d\zeta' ,$$

ce qui montre que $R(\zeta)(\mathbb{1}-P)$, et donc $R_{M''}(\zeta)$ dans M'' , ont un prolongement analytique dans tout l'intérieur du domaine de frontière Γ. $\rho(T_{M''})$ contient donc en particulier σ' , d'où $\sigma(T_{M''}) \subset \sigma''$.

Enfin, si $\zeta \in \sigma(T)$, $\zeta \notin \rho(T_{M'}) \cap \rho(T_{M''})$ sinon ζ appartiendrait à $\rho(T)$ puisque $R_{M'}(\zeta)P + R_{M''}(\zeta)(\mathbb{1}-P)$ serait l'inverse de $(\zeta\mathbb{1}-T)$. D'où $\sigma(T) \subset \sigma(T_{M'}) \cup \sigma(T_{M''})$ et alors $\sigma' = \sigma(T_{M'})$ et $\sigma'' = \sigma(T_{M''})$.

Montrons finalement que $TP \in \mathcal{L}(E)$: on a d'abord

$$TP = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma TR(\zeta)\, d\zeta$$

puisque T est fermé et que l'on peut approcher l'intégrale par une somme finie. D'autre part, $TR(\zeta) = -\mathbb{1} + \zeta R(\zeta)$, d'où

$$TP = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta R(\zeta)\, d\zeta \in \mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad T_{M'} \in \mathcal{L}(M') . \ \blacksquare$$

<u>Remarque</u>. On a vu que l'on peut écrire $R(\zeta)$ sous la forme suivante : $R(\zeta) = R'(\zeta) + R''(\zeta)$, avec

$$\begin{cases} R'(\zeta) = PR(\zeta) = R(\zeta)P \text{ , holomorphe en dehors de } \sigma' \text{ et } \equiv R_{M'}(\zeta) \text{ sur } M' \\ R''(\zeta) = (1-P)R(\zeta) = R(\zeta)(\mathbb{1}-P) \text{ , holomorphe en dehors de } \sigma'' \\ \qquad\qquad \text{et } \equiv R_{M''}(\zeta) \text{ sur } M'' , \\ (\mathbb{1}-P)R'(\zeta) = PR''(\zeta) = 0 . \end{cases}$$

2) <u>Valeurs propres isolées</u>.

On suppose dans ce paragraphe que $\sigma(T)$ a un point isolé λ . C'est un cas particulier de la situation du 1). L'opérateur $T_{M'}$ a son spectre uniquement constitué par $\{\lambda\}$. D'où $T_{M'}-\lambda\mathbb{1}$ est quasi-nilpotent, puisque $0 = \sup|\sigma(T_{M'}-\lambda\mathbb{1})| = \operatorname{spr}(T_{M'}-\lambda\mathbb{1})$. Il en résulte, d'après le §.II.2), que la série

$$R_{M'}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta-\lambda)^{-(n+1)}(T_{M'}-\lambda\mathbb{1})^n$$

converge dans $\mathcal{L}(M')$ sauf pour $\zeta=\lambda$. On a donc, avec les notations du 1) :

$$(1) \qquad R'(\zeta) = R_{M'}(\zeta)P = \frac{P}{\zeta-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{(\zeta-\lambda)^{n+1}}$$

où $D = (T-\lambda\mathbb{1})P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta-\lambda)R(\zeta)\, d\zeta \in \mathcal{L}(E)$
est quasi-nilpotent et $D = DP = PD$.

Maintenant, $R_{M''}(\zeta)$ est holomorphe en $\zeta=\lambda$ et admet un développement en série de Taylor, déduit de la formule (II.2)) :

$$(2) \qquad R''(\zeta) = R_{M''}(\zeta)(\mathbb{1}-P) = \sum_{k=0}^{\infty} [-(\zeta-\lambda)S]^k S$$

où $S = R_{M''}(\lambda)(\mathbb{1}-P) = \lim_{\zeta\to\lambda}[R(\zeta)(\mathbb{1}-P)]$, $R(\lambda)$ n'existant pas.

Remarquons que

$$S = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R(\zeta)}{\zeta-\lambda}\, d\zeta \in \mathcal{L}(E)$$

et que $ST \subset TS \in \mathcal{L}(E)$, $(\lambda\mathbb{1}-T)S = \mathbb{1}-P$, $SP = PS = 0$.

Le développement en série de Laurent de $R(\zeta)$ est obtenu en effectuant $R'(\zeta) + R''(\zeta)$ exprimés par (1) et (2) :

$$(3) \qquad R(\zeta;T) = \frac{P}{\zeta-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{(\zeta-\lambda)^{n+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\zeta-\lambda)^k S^{k+1} .$$

<u>Dans le cas où</u> M' <u>est de dimension finie</u>, $T_{M'}-\lambda\mathbb{1} = D_{M'}$ est alors nilpotent : on montrerait aisément que $M' \supset (T_{M'}-\lambda)M' \supset \dots \supset (T_{M'}-\lambda)^n M' \supset \dots$ toutes les inclusions étant strictes, il existe donc $k \geq 1$ tel que $(T_{M'}-\lambda\mathbb{1})^k M' = 0$. <u>Dans ce cas</u> λ <u>est valeur propre</u> de $T_{M'}$, donc de T, <u>d'indice</u> k , <u>de multiplicité</u> m , où m est la dimension de M' . Quand, dans la suite, nous parlerons <u>de valeurs propres isolées</u>, nous entendrons par là : <u>des valeurs propres de multiplicités finies</u>, <u>points isolés</u> du spectre $\sigma(T)$.

3) <u>Résolvante de l'adjoint</u>.

<u>Théorème</u>. $\rho(T^*)$ <u>et</u> $\sigma(T^*)$ <u>sont respectivement les conjugués de</u> $\rho(T)$ <u>et</u> $\sigma(T)$ <u>dans</u> $\mathbb{C}$. <u>De plus, si</u> $\zeta \in \rho(T)$,

$$R(\overline{\zeta};T^*) = R(\zeta;T)^* .$$

<u>Démonstration</u> : D'après le §.III,6) du chapitre 2, en remplaçant T par $(\zeta\mathbb{1}-T)$, le **théorème** est immédiat. ∎

<u>Conséquences</u>.

Si $\sigma(T)$ est séparé en $\sigma' \cup \sigma''$ par la courbe Γ comme au 1), alors $\sigma(T^*)$ est séparé par $\overline{\Gamma}$ en deux parties $\overline{\sigma'}$ et $\overline{\sigma''}$. De plus,

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\zeta;T)d\zeta \longrightarrow P^* = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\Gamma}} R(\overline{\zeta};T^*)d\overline{\zeta} ,$$

mais la deuxième intégrale n'est pas prise dans le sens positif, d'où :

$$P^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\Gamma}} R(\zeta;T^*)d\zeta ,$$

et P^* n'est autre que la projection associée à la séparation du spectre de T^* en $\overline{\sigma'} \cup \overline{\sigma''}$. On a alors

$$\begin{cases} E = M' \oplus M'' & , M' = PE \quad , M'' = (\mathbb{1}-P)E \ , \\ E^* = M'^* \oplus M''^* & , M'^* = P^*E^*, M''^* = (1-P^*)E^* \ . \end{cases}$$

Supposons maintenant que M' soit de dimension finie m (P dégénéré de rang m). Choisissons une base $\{v_1,\dots,v_m\}$ de $M' = R(P)$.
$\forall u \in E$, $Pu = \sum_{j=1}^{m} \eta_j v_j$, η_j unique à partir de u .

De plus $|\eta_j| \leq \gamma \|Pu\| \leq \gamma \|P\| . \|u\|$, puisque toutes les normes sont équivalentes dans M' . D'où $u \longrightarrow \overline{\eta}_j \in E^*$ et on note $\eta_j = \overline{(e_j,u)}$ où $e_j \in E^*$. On a alors :

$$Pu = \sum_{j=1}^{m} \overline{(e_j,u)} v_j \Longrightarrow P = \sum_{j=1}^{m} (\cdot,e_j)v_j \ .$$

Soit maintenant $f \in E^*$, on a $\forall u \in E$

$$(P^*f,u) = (f,Pu) = \sum_{j=1}^{m} (e_j,u)(f,v_j) = (\sum_{j=1}^{m} (f,v_j)e_j,u) \ .$$

D'où

$$P^*f = \sum_{j=1}^{m} (f,v_j)e_j \Longrightarrow P^* = \sum_{j=1}^{m} (\cdot,v_j)e_j \ ,$$

et $R(P^*) = M'^*$ est engendré par les m vecteurs $e_1,\dots,e_m$. Il en résulte que P^* est dégénéré de rang $m^* \leq m$. On montrerait de même que le rang m^{**} de P^{**} est $\leq m^*$. Or P peut être considéré comme une restriction de P^{**}, d'où $m \leq m^{**}$. Il en résulte que $m=m^*$ c'est-à-dire que

$$\dim M' = \dim M'^* \quad \text{et} \quad \dim M'' = \dim M''^* \quad \text{(finies ou non).}$$

Il en résulte que si λ est valeur propre isolée de T , d'indice k de multiplicité m , alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre isolée de T^*, d'indice k et de multiplicité m . De plus (on raisonnerait dans M' et M'^* comme en dimension finie) :

$$\dim N([(T-\lambda\mathbb{1})P]^n) = \dim N([(T^*-\overline{\lambda}\mathbb{1})P^*]^n) \ , \quad n=1,\dots,k \ .$$

En particulier si l'indice vaut 1* (valeur-propre "semi-simple") alo[rs]

* **Nous utiliserons fréquemment dans la suite, la propriété énoncée dans ce cas.**

les v_j sont des vecteurs propres de T et les e_j des vecteurs propres de T^*, tels que : $(e_j,v_k) = \delta_{jk}$.

IV. Spectres des opérateurs compacts.

1) Opérateurs compacts.

Théorème. Soit $T\in\mathcal{L}_o(E)$, alors $\sigma(T)$ est un ensemble dénombrable sans point d'accumulation autre que 0 . Si $0 \neq \lambda\in\sigma(T)$ alors λ est valeur-propre de T de multiplicité finie.

Démonstration : 1ère étape. On montre d'abord que les valeurs propres de T ne peuvent s'accumuler en un point λ autre que 0 .

En effet, soit $\{\lambda_n\}$ une suite de valeurs propres distinctes, et des vecteurs propres associés u_n , telle que $0 \neq \lambda_n \longrightarrow \lambda \neq 0$. On note M_n le sous-espace engendré par les vecteurs $u_1,\dots,u_n$. M_n est invariant par T et $M_{n-1}\subset M_n$ strictement (les u_i sont linéairement indépendants). Il existe alors $v_n\in M_n$ tel que $\|v_n\| = 1$ et $\mathrm{dist}(v_n,M_{n-1}) = 1$ (cf. en bas de page). On considère maintenant la suite $\{\lambda_n^{-1}\, Tv_n\}$:

$$\lambda_n^{-1}\, Tv_n - \lambda_m^{-1}\, Tv_m = v_n - \underbrace{(\lambda_m^{-1}\, Tv_m - \lambda_n^{-1}(T-\lambda_n)v_n)}_{\in M_{n-1}} , \quad n>m .$$

Comme $\mathrm{dist}(v_n,M_{n-1}) = 1$, $\|\lambda_n^{-1}\, Tv_n - \lambda_m^{-1}\, Tv_m\| \geqslant 1$, et on ne peut pas extraire de sous-suite de Cauchy de $\{T(\lambda_n^{-1}\, v_n)\}$ ce qui contredit la compacité de T ($\{\lambda_n^{-1}\, v_n\}$ est bornée).

En effet, $\mathrm{dist}(u_n,M_{n-1}) = d$ et $\exists\{w_p\}\subset M_{n-1}$ telle que $\|u_n-w_p\|\leqslant \frac{d}{1-1/p}$

On pose $v_{n,p} = \frac{u_n-w_p}{\|u_n-w_p\|}$, alors $\|v_{n,p}\| = 1$ et

$$\mathrm{dist}(v_{n,p},M_{n-1}) = \frac{1}{\|u_n-w_p\|} \inf_{w\in M_{n-1}} \|u_n-w\| = \frac{d}{\|u_n-w_p\|} \geqslant 1-1/p .$$

Puisque $\dim M_n < \infty$ et que M_n est fermé, on peut extraire de la suite $\{v_{n,p}\ ;\ p=2,3,\dots\}$ une sous-suite convergente vers un certain v_n qui vérifie alors :

$$\|v_n\| = 1 \quad\text{et}\quad \mathrm{dist}(v_n,M_{n-1}) = 1 .$$

<u>2ème étape</u>. On montre ensuite que si $0 \neq \zeta$ non valeur-propre de T, alors $R(T-\zeta\mathbb{1})$ est fermé.

On suppose que $(T-\zeta)u_n \longrightarrow v$, et on doit montrer que $v \in R(T-\zeta)$. Si $\{u_n\}$ est bornée, $\{Tu_n\}$ contient une suite de Cauchy : $Tu_n^{(1)} \longrightarrow w$. Alors $\zeta u_n^{(1)} = Tu_n^{(1)} - (T-\zeta)u_n^{(1)} \longrightarrow w-v$, d'où $\zeta Tu_n^{(1)} \longrightarrow T(w-v)$, et $v = \zeta^{-1}(T-\zeta)(w-v) \in R(T-\zeta\mathbb{1})$.

Si $\{u_n\}$ n'était pas bornée, on pourrait extraire une sous-suite $\{u_n^{(1)}\}$ telle que $\|u_n^{(1)}\| \longrightarrow \infty$. Posons alors $u_n'^{(1)} = \dfrac{u_n^{(1)}}{\|u_n^{(1)}\|}$ et $\{u_n'^{(1)}\}$ est bornée et telle que $(T-\zeta)u_n'^{(1)} \longrightarrow 0$.

Or $\exists\ \{u_n'^{(2)}\}$ telle que $Tu_n'^{(2)} \longrightarrow w$, d'où $\zeta u_n'^{(2)} \longrightarrow w$ et

$(T-\zeta)w = 0$. D'où $\|w\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|\zeta u_n'^{(2)}\| = |\zeta| > 0$ et w doit être vecteur-propre de T pour la valeur propre ζ. Il y a donc contradiction, d'où $\{u_n\}$ est bornée et $R(T-\zeta\mathbb{1})$ est fermé.

<u>3ème étape</u>. On a vu au §.II, théorème 3 du chapitre 2 que $T^* \in \mathcal{L}_0(E^*)$. On dira que ζ est exceptionnel si ζ est valeur propre de T ou $\bar{\zeta}$ est valeur propre de T^*. D'après la 1ère étape, l'ensemble des points exceptionnels est dénombrable et n'a pas de point d'accumulation autre que 0. Montrons que si $0 \neq \zeta$ n'est pas exceptionnel, alors $\zeta \in \rho(T)$. On a vu au chapitre 2 que $R(T-\zeta\mathbb{1})^{\perp} = N(T^*-\bar{\zeta}\mathbb{1})$, or $\bar{\zeta}$ non valeur-propre de T^* entraîne que $R(T-\zeta\mathbb{1})^{\perp} = 0$.
Mais $R(T-\zeta\mathbb{1})$ étant fermé, $R(T-\zeta\mathbb{1}) = E$ et $(\zeta\mathbb{1}-T)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \Longrightarrow \zeta \in \rho(T)$.

D'autre part, un point exceptionnel appartient évidemment à $\sigma(T)$ (cf. Théorème du §.III,3)). D'où $\sigma(T)$ est identique à l'ensemble des points exceptionnels (à 0 près).

<u>4ème étape</u>. Montrons maintenant que la projection P associée à $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$, est dégénérée. Comme λ est isolé, si Γ est un cercle centré en λ, de rayon assez petit, on a :

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\zeta)\, d\zeta \quad \text{et} \quad R(\zeta) - \frac{1}{\zeta}\mathbb{1} = \frac{1}{\zeta}\, TR(\zeta) \in \mathcal{L}_0(E) \quad \text{car}$$

produit d'un opérateur compact par un opérateur borné. Mais, puisque

$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$ car $\lambda \neq 0$, alors $P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{TR(\zeta)}{\zeta} d\zeta \in \mathcal{L}_o(E)$ car limite en norme de sommes finies d'opérateurs compacts. Mais une projection compacte est nécessairement dégénérée (puisque tout borné de l'espace-image doit être séquentiellement compact) Il en résulte que $\forall\, 0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ alors λ est valeur-propre de multiplicité finie de T et $\bar{\lambda}$ valeur-propre de même multiplicité de T^*. ∎

2) Opérateurs à résolvante compacte.

Théorème. Soit T un opérateur fermé dans E, tel que la résolvante existe et soit compacte pour un certain ζ. Alors le spectre de T est entièrement constitué de valeurs propres isolées de multiplicités finies et $R(\zeta;T)$ est compact pour tout $\zeta \in \rho(T)$.

Démonstration : On suppose que $R(\zeta;T)$ est compact pour $\zeta_o \in \rho(T)$. Alors le spectre de $R(\zeta_o;T)$ est dénombrable et n'a pas de point d'accumulation autre que 0. Mais, d'après le Théorème du §.II.3)), $\tilde{\sigma}\{R(\zeta_o;T)\} = \sigma\{R(\zeta_o;T)\}$ est l'image par $\zeta \longrightarrow \zeta^{-1}$ de $\tilde{\sigma}(\zeta_o 1\!\!1 - T)$. Il en résulte que $\tilde{\sigma}(T)$ est l'image par $\zeta \longrightarrow \zeta_o - \zeta^{-1}$ de $\sigma\{R(\zeta_o;T)\}$. Le spectre $\sigma(T)$ est donc constitué de points isolés. On peut alors écrire

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\zeta;T)d\zeta \quad \text{où } \Gamma \text{ entoure seulement } \lambda \in \sigma(T) .$$

Or, $P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} R[\mu;R(\zeta_o;T)]d\mu$, $\mu = \frac{1}{\zeta_o - \zeta}$, Γ_1 entourant $(\zeta_o - \lambda)^{-1}$.

Mais, d'après l'identité :

$$R[(\zeta_o-\zeta)^{-1};R(\zeta_o;T)] = \zeta_o - \zeta + (\zeta_o-\zeta)^2\, R(\zeta;T) ,$$

on arrive à

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(R(\zeta;T) + \frac{1}{\zeta_o - \zeta}\right) d\zeta = P .$$

Il en résulte que si $\lambda \in \sigma(T)$, alors λ est valeur-propre de T, de même multiplicité que $(\zeta_o-\lambda)^{-1}$ pour $R(\zeta_o;T)$, l'opérateur projection associé étant identique.

Maintenant, $\forall\ \zeta \in \rho(T)$ on a

$$R(\zeta;T) = R(\zeta_o;T)[1 + (\zeta_o-\zeta)R(\zeta;T)] ,$$

d'où $R(\zeta;T)$ est compact comme produit d'un opérateur compact avec un opérateur borné. ∎

V. Opérateurs linéaires dans les Hilbert.

1) Rappels de résultats généraux.

On note (u,v) le produit scalaire de u et $v \in$ l'espace de Hilbert H. Tout $f \in H^*$ peut être identifié à un $u \in H$ (Théorème de Riesz). L'espace H est réflexif : $H = H^{**} = H^*$ (isomorphisme isométrique). Si $T \in \mathcal{L}(H)$, alors $T^{**} = T$.

Si T est un opérateur linéaire fermé de H dans H', de domaine dense, alors

$$T : H \longrightarrow H' \quad ; \quad T^* : H' = H'^* \longrightarrow H^* = H$$

et $N(T^*) = R(T)^{\perp}$, $N(T) = R(T^*)^{\perp}$.

Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal : $T^*T = TT^*$, alors $\operatorname{spr} T = \|T\|$ (même démonstration qu'en dimension finie : $\|T^n\| = \|T\|^n$).

2) Opérateurs symétriques.

Définition 1. T est dit symétrique s'il est de domaine dense et que $T^* \supset T$.

T est dit autoadjoint si $T^* = T$.

Il reviendrait au même de dire que T est symétrique si et seulement si

$$(Tu,v) = (u,Tv) \quad \forall u,v \in D(T) .$$

On remarque que $(Tu,u) \in \mathbb{R}$; alors on a

Définition 2. T est dit non-négatif si T est symétrique et si $(Tu,u) \geq 0$, $u \in D(T)$.

3) Spectre et résolvante des opérateurs autoadjoints.

On a d'abord, par la symétrie de T :

$$\forall\, u \in D(T) \ , \ \|(T-\zeta)u\|^2 = \|(T-\mathrm{Re}\,\zeta)u\|^2 + (\mathrm{Im}\,\zeta)^2\|u\|^2 \ ,$$

ce qui entraîne

$$\|(T-\zeta)u\| \geq |\mathrm{Im}\,\zeta|\,\|u\| \ .$$

Donc, si $\zeta \notin \mathbb{R}$, il en résulte immédiatement que $T-\zeta\mathbb{1}$ est inversible et que $R(T-\zeta\mathbb{1})$ est fermé. Mais, $N(T^*-\bar{\zeta}\mathbb{1}) = R(T-\zeta\mathbb{1})^{\perp}$ et $\bar{\zeta} \notin \mathbb{R}$ ne peut être valeur-propre de $T^* = T$, d'où $R(T-\zeta\mathbb{1}) = H$ et $\zeta \in \rho(T)$. De plus on a

$$\|R(\zeta;T)\| \leq |\mathrm{Im}\,\zeta|^{-1} \quad \text{et} \quad \sigma(T) \subset \mathbb{R} \ .$$

D'autre part, l'opérateur $TR(\zeta;T) = -\mathbb{1} + \zeta R(\zeta;T)$ est normal, puisque $[R(\zeta;T)]^* = R(\bar{\zeta};T)$. Cela entraîne

$$\|TR(\zeta;T)\| = \mathrm{spr}(-\mathbb{1}+\zeta R(\zeta;T)) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} \left|-1 + \frac{\zeta}{\zeta-\lambda}\right| \ ,$$

d'où $\|TR(\zeta;T)\| = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} \left(\dfrac{|\lambda|}{|\lambda-\zeta|}\right)$.

Enfin, si le spectre $\sigma(T)$ est séparé comme au §.III, alors la projection P associée est orthogonale : $P = P^*$, $\|P\| = 1$. C'est en particulier ce qui se passe s'il y a une valeur-propre isolée dans $\sigma(T)$.

4) Opérateurs semi-bornés et opérateurs accrétifs.

Définition 1. Un opérateur symétrique T est dit "semi-borné inférieurement" si $\forall\, u \in D(T)$, $(Tu,u) \geq \gamma(u,u)$, pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$.

On écrira $T \geq \gamma$ et la borne inférieure de T sera $\sup \gamma$.

Définition 2. Un opérateur linéaire T est dit "accrétif" si $\forall\, u \in D(T)$

$$\mathrm{Re}(Tu,u) \geq 0 \ .$$

Définition 3. Un opérateur linéaire T est dit "m-accrétif" si pour $\Re e\ \lambda > 0$

$$(T+\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \quad \text{et} \quad \|(T+\lambda)^{-1}\| \leq 1/_{\Re e\ \lambda} .$$

Théorème. Si T est un opérateur linéaire m-accrétif, alors T est fermé, de domaine dense et maximal-accrétif.

Démonstration : T est fermé puisque, pour $\lambda > 0$, $(T+\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.
Maintenant, on a $\|(T+\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$, d'où $\forall\, u \in D(T)$

$$\|u\| \leq \frac{1}{\lambda}\|(T+\lambda)u\|$$

et $\|u\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\|Tu\|^2 + \frac{2}{\lambda}\Re e(Tu,u) + \|u\|^2$,

$$0 \leq \frac{1}{\lambda}\|Tu\|^2 + 2\,\Re e(Tu,u) .$$

Si l'on fait tendre $\lambda \longrightarrow \infty$, on doit avoir $\Re e(Tu,u) \geq 0$, d'où T est accrétif.

Soit maintenant T_1 une extension accrétive* de T, alors $(T_1+\lambda)^{-1}$ est une extension de $(T+\lambda)^{-1}$ pour $\Re e\ \lambda > 0$; mais $D[(T+\lambda)^{-1}] = H$, d'où $T_1 \equiv T$.

Enfin, $D(T) = R[(T+\lambda)^{-1}]$ pour $\Re e\ \lambda > 0$; montrons que $((T+\lambda)^{-1}u,v) = 0$ $\forall\, u \in H \Longrightarrow v = 0$.

Prenons $u=v$ et posons $(T+\lambda)^{-1}v = w$, on a alors

$$0 = \Re e((T+\lambda)^{-1}v,v) = \Re e(w,(T+\lambda)w) \geq \Re e\ \lambda\|w\|^2 ,$$

d'où $w=0$, $v=0$ et $D(T)$ est dense. ∎

Définition 4. Un opérateur linéaire T est dit "quasi-accrétif" s'il existe un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $T+\alpha$ soit accrétif.

On aurait une définition analogue pour les opérateurs "quasi m-accrétifs".

5) Opérateurs m-sectoriels.

Définition 1. On appelle "image numérique" $\Theta(T)$ de T l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z = (Tu,u)$, $u \in D(T)$, $\|u\|=1$.

* $T_1+\lambda$ est inversible car $\forall\, u \in D(T_1)$, $\Re e((T_1+\lambda)u,u) > \lambda\|u\|^2$.

Définition 2. Un opérateur linéaire T est dit "sectoriel", de sommet γ, de demi-angle θ (non-uniques) si l'image numérique $\Theta(T)$ est dans le secteur $\sum$: $\Re e\ z \geq \gamma$, $|\mathrm{Im}\ z| \leq \mathrm{tg}\ \theta\ (\Re e\ z-\gamma)$.

Définition 3. Un opérateur linéaire T est dit "m-sectoriel" s'il est sectoriel et quasi-m-accrétif.*

Il en résulte immédiatement que si T est "m-sectoriel", il est alors fermé de domaine dense, maximal quasi-accrétif. De plus, $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $T-\alpha$ soit m-accrétif c'est-à-dire que

$$\text{si } \Re e\ \zeta < \alpha \text{ alors } \|(T-\zeta\mathbb{1})^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha - \Re e\ \zeta} .$$

Notons maintenant γ et θ respectivement le sommet et le demi-angle du secteur $\sum$, alors si $\zeta \notin \sum$ on a $\mathrm{dist}(\zeta,\sum) = \delta > 0$ et $\forall\, u \in D(T)$ avec $\|u\| = 1$ on a

$$\delta \leq |(Tu,u)-\zeta| = |((T-\zeta)u,u)| \leq \|(T-\zeta)u\| .$$

D'où, par homogénéité :

$$(1) \qquad \forall\, u \in D(T) \quad \|(T-\zeta)u\| \geq \delta\,\|u\| .$$

Il en résulte que $N(T-\zeta\mathbb{1}) = 0$ et que $R(T-\zeta\mathbb{1})$ est fermé, par la même démonstration que pour les opérateurs autoadjoints. Or, l'on sait déjà que pour $\mathrm{Re}\ \zeta<\alpha$, $\zeta \in \rho(T)$, c'est-à-dire que si l'on suppose $\alpha \leq \gamma$, on a en fait

$$\|(T-\zeta\mathbb{1})^{-1}\| \leq [\mathrm{dist}(\zeta;\textstyle\sum)]^{-1} .$$

(Si $\alpha>\gamma$, le raisonnement est encore plus évident). Mais on a vu au §.II.1), que si $\zeta_o \in \rho(T)$ alors tout le disque $|\zeta-\zeta_o| < \mathrm{dist}(\zeta_o;\sum) \leq \|(T-\zeta_o\mathbb{1})^{-1}\|^{-1} \subset \rho(T)$. Il devient alors évident que l'on peut recouvrir tout le complémentaire de $\sum$ dans $\mathbb{C}$ par de tels disques centrés dans la région $\Re e\ \zeta_o < \alpha$. Il en résulte que $\sigma(T) \subset \sum$ et que

$$\forall\ \zeta \notin \textstyle\sum, \quad \|R(\zeta;T)\| \leq [\mathrm{dist}(\zeta;\textstyle\sum)]^{-1} .$$

*** Cf. en exercice un lemme donnant une condition suffisante pour que T soit m-sectoriel.**

<u>Estimations utiles pour la résolvante de l'opérateur m-sectoriel</u> T :

Soit $\zeta = \gamma + \rho\, e^{i\alpha}$ avec $\theta + \frac{\pi}{2} \leq |\alpha| \leq \pi$, alors

$$\|R(\zeta;T)\| \leq 1/_{\rho} ,$$

d'où, si $\lambda = \rho\, e^{i\beta}$ avec $|\beta| \leq \frac{\pi}{2} - \theta$, on a

$$\|(T-\gamma+\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} ,$$

c'est-à-dire encore :

(2) $$\|(e^{i\beta}(T-\gamma)+\lambda)^{-1}\| \leq 1/_{\lambda} , \text{ si } \lambda>0 \text{ et } |\beta| \leq \frac{\pi}{2} - \theta .$$

Soit maintenant $\zeta = \gamma + \rho\, e^{i\alpha}$ avec $\theta < |\alpha| \leq \theta + \frac{\pi}{2}$, alors $\mathrm{dist}(\zeta;\sum) = \rho \sin(|\alpha|-\theta)$, d'où

$$\|R(\zeta;T)\| \leq \frac{1}{\rho \sin(|\alpha|-\theta)} ,$$

et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\arg \lambda| \leq \pi-\theta-\varepsilon$ on a une constante M_ε telle que

(3) $\|(T-\gamma+\lambda)^{-1}\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}$.

-:-:-:-

Exercices.

1. Alternative de Fredholm. (On montrera celle-ci dans le cas des opérateurs à résolvante compacte, au chapitre 8).

Soit T un opérateur linéaire compact dans le Banach E, on suppose que $1 \in \sigma(T)$.

a) - Montrer que $R(1-T)$ est fermé dans E.

Indications. Soit $v \in \overline{R(1-T)}$, et $\{u_n\} \subset E$, $(1-T)u_n \to v$. Soit, dist $[u_n, N(1-T)]$ est non bornée et cela conduit à une absurdité; soit, dist $[u_n, N(1-T)]$ est bornée et $\exists \{u'_n\}$, $u_n - u'_n \in N(1-T)$ avec $\{u'_n\}$ bornée, et cela conduit à $v \in R(1-T)$.

b) - Déduire du a) que $R(1-T) = \{N(1-T^*)\}^{\perp} \cap E$.

Indications. On montre que $\forall$ le sous-espace V de E, on a $(V^{\perp})^{\perp} \cap E = \overline{V}$, grâce au théorème de Hahn-Banach, et à l'identification de E à un sous-espace de E^{**}. Ensuite on utilise une propriété démontrée au § III.6 du chapitre II.

c) - On sait que $N(1-T^*)$ a la même dimension que $N(1-T)$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution pour le problème $(1-T)u = v$ où u est l'inconnue et $v \in E$, est que $v \in \{N(1-T^*)\}^{\perp}$. La solution u est alors définie à un élément de $N(1-T)$ près.

2. Démontrer que si T est un opérateur linéaire tel que T^{-1} soit borné et autoadjoint dans H (Hilbert), alors T est lui aussi autoadjoint.

Indications. Soit $\eta \neq 0$, $T + i\eta = T(1 + i\eta T^{-1})$, d'où $(T+i\eta)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ et $T \in \mathcal{F}(H)$. Montrer que $D(T) = R(T^{-1}) = R\{(T+i\eta)^{-1}\}$ est dense dans H. On applique ensuite le théorème du § III.6 du chapitre II.

3. Montrer que si T est sectoriel (sommet γ, demi-angle θ), et si $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e\lambda > -\gamma$ et $T + \lambda 1$ admet un inverse borné, alors T est m-sectoriel.

Indications. Soit α tel que $\Re e\alpha < \gamma$, montrer que $T - \alpha 1$ est injectif et tel que $R(T-\alpha)$ soit fermé. Puis $\forall \zeta$ tel que $|\zeta + \lambda| < \gamma + \Re e\lambda$ alors $\|(T-\zeta)^{-1}\| < (\gamma - \Re e\zeta)^{-1}$. En considérant un $-\lambda'$ appartenant au disque précédent, on itère le raisonnement et on recouvre ainsi le complémentaire du secteur (γ, θ) par de tels disques et l'estimation ci-dessus est encore vraie $\forall \zeta$ en dehors du secteur (γ, θ).

4. Soit L autoadjoint > 0, d'inverse borné, on note $\lambda_o = \inf\{\zeta, \zeta\in\sigma(L)\}$. Montrer que $\forall u \in D(L)$, $(Lu,u)_H \geq \lambda_o \|u\|_H^2$.

Indications. Si $\lambda \geq 0$, montrer que $\|(L+\lambda)^{-1}\| = (\lambda_o+\lambda)^{-1}$ en utilisant $\mathrm{spr}(L+\lambda)^{-1} = \|(L+\lambda)^{-1}\|$, puisque $(L+\lambda)^{-1}$ est autoadjoint. Ensuite $\forall u \in D(L)$ on a $\|u\| \leq (\lambda_o+\lambda)^{-1}\|(L+\lambda)u\|$ qui donne $((L-\lambda_o)u,u)_H \geq 0$.

5. Soient $H = L^2(0,1)$ et T l'opérateur de domaine

$$D(T) = \{u\in H \ ; \ \frac{du}{dx}\in H, \ \frac{d^2u}{dx^2}\in H, \ u(0) = u(1) = 0\}, \text{ et tel que}$$

$$\forall u \in D(T), \ Tu = -\frac{d^2u}{dx^2}.$$

N. B. Les dérivées sont prises au sens des distributions et les traces u(0) et u(1) sont celles du représentant continu de la classe, sur $[0,1]$.

a) - Montrer que T est autoadjoint dans H, à résolvante compacte.

Indications. On construit l'inverse de T (opérateur intégral) qui est alors autoadjoint et compact dans H. On applique ensuite le résultat de l'exercice 2 et le théorème du § IV.2.

b) - Montrer que le spectre de T n'est constitué que des valeurs propres simples $\lambda_k = k^2\pi^2$, $k\in\mathbb{N}^*$.

Indication. Montrer que les valeurs propres d'un opérateur autoadjoint sont toujours semi-simples (indice = 1), le calcul des λ_k est alors évident, ainsi que celui des vecteurs propres : $\sin k\pi x$.

c) - Montrer que $\forall u \in D(T)$, $\|u'\|_{L^2}^2 \geq \pi^2\|u\|_{L^2}^2$ (cf. Exercice 4).

6. Soient H et T définis à l'exercice 5, et soit l'opérateur S tel que $D(S) = D(T)$, $\forall u \in D(T)$, $Su = a(x)\frac{du}{dx} + b(x)u$ où a et $b \in C^o([0,1];\mathbb{R})$.

a) - Montrer que ST^{-1} est compact dans H.

Indications. On montre d'abord que $T^{-1}\in\mathcal{L}(H;\mathcal{D})$ où $\mathcal{D} = D(T)$ muni de la norme du graphe de T, grâce au théorème du graphe fermé. On montre ensuite que S est continu de $H^1(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ où $H^1(0,1) = \{u\in L^2(0,1), \frac{du}{dx}\in L^2(0,1)\}$ est muni de la norme $(\|u\|_{L^2}^2 + \|\frac{du}{dx}\|_{L^2}^2)^{1/2}$. Il reste alors à montrer que l'application identique est compacte de $\mathcal{D}$ dans $H^1(0,1)$, en utilisant le théorème d'Ascoli et la continuité de l'identité de $C^o([0,1];\mathbb{C})$ dans $L^2(0,1)$.

b) - Montrer que l'opérateur $T_1 = T+S$ est <u>sectoriel</u> ($D(T_1) = D(T)$).
Indication. Utiliser une intégration par parties et des inégalités classiques pour montrer que $\forall u \in D(T)$ on a :

$$|\mathcal{J}m(T_1u,u)_H| \leq \operatorname{tg}\theta_\varepsilon\{\mathcal{R}e(T_1u,u)_H - \gamma_\varepsilon\|u\|_H^2\},$$

où l'on peut rendre θ_ε aussi petit que l'on veut, alors que $\gamma_\varepsilon \in \mathbb{R}$ dépend de ε.

c) - Montrer que T_1 est <u>m-sectoriel</u> à <u>résolvante compacte</u>.
Indication. Utiliser le résultat de l'exercice 3, et montrer que pour $\lambda > -\gamma_\varepsilon$, $T_1+\lambda$ est d'inverse compact(-1 n'est pas valeur propre de $(S+\lambda)T^{-1}$).

-:-:-:-

IV - Semi-groupes d'opérateurs.

-:-:-:-

Semi-groupes d'opérateurs.

Dans ce chapitre, il s'agira, d'une manière générale, de résoudre le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Tu = f(t) , \\ u(0) = u_o , \end{cases}$$

où u, f et u_o sont dans un espace convenable, T étant un opérateur linéaire, borné ou non.

I. Définitions.

1) Définition d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs.

Une famille $\{\mathfrak{T}(t)\}$, $0\leqslant t<\infty$, d'opérateurs linéaires bornés dans le Banach E , est appelée un semi-groupe fortement continu si :

$$\begin{cases} \mathfrak{T}(t+s) = \mathfrak{T}(t).\mathfrak{T}(s) , \quad s,t\geqslant 0 , \\ \mathfrak{T}(0) = \mathbb{1} , \\ \forall u \in E , \ \mathfrak{T}(t)u \text{ est continu en } t \text{ sur } [0,\infty[. \end{cases}$$

2) Semi-groupe uniformément continu pour $t\geqslant 0$.

Si $T \in \mathcal{L}(E)$, il est classique de définir

$$e^{-Tt} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n T^n .$$

La famille $\{e^{-Tt} ; t\geqslant 0\}$ est évidemment un semi-groupe (et même un groupe!). De plus ce semi-groupe est uniformément continu (topologie de la convergence en norme dans $\mathcal{L}(E)$) , et même $t \longrightarrow e^{-Tt}$ est une fonction entière (holomorphe dans $\mathbb{C}$) .

On a

$$\frac{d}{dt}(e^{-Tt}) = -T e^{-Tt} = - e^{-Tt}T .$$

On connait donc la solution du problème

$$\text{(1)} \qquad \frac{du}{dt} + Tu = 0 , \quad u(0) = u_o \in E ,$$

qui est : $u(t) = e^{-Tt}u_o \in E$ pour $t \in [0,\infty[$.

On pourrait montrer (cf. référence [2]) réciproquement que si $\{\mathfrak{T}(t)\}$ est un semi-groupe uniformément continu pour $t \geq 0$, alors $\exists$ $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathfrak{T}(t) = e^{-Tt}$ pour $t \geq 0$, avec $-T = \lim\limits_{h\to o} \dfrac{(\mathfrak{T}(h)-\mathbb{1})}{h}$.

3) <u>Fonction exponentielle pour un opérateur non borné.</u>

L'idée est de définir e^{-Tt} par la limite quand $n \longrightarrow \infty$ de $(\mathbb{1}+\frac{t}{n}T)^{-n}$, par analogie à la fonction numérique exponentielle. Soit donc T un opérateur linéaire fermé, de domaine $D(T)$ dense dans E . On suppose de plus que l'axe réel <0 est dans $\rho(T)$ et que $\|(T+\xi)^{-1}\| \leq \xi^{-1}$, $\xi>0$.

On note d'abord que si $\alpha \geq 0$, alors

(2) $$\|(\mathbb{1}+\alpha T)^{-1}\| \leq 1 \ ;$$

puis, si l'on pose

$$V_n(t) = (\mathbb{1}+\frac{t}{n}T)^{-n} \ , \ t \geq 0 \ , \ n=1,2,\ldots \ ,$$

il est immédiat de voir que les $V_n(t)$ sont uniformément bornés : $\|V_n(t)\| \leq 1$. De plus, $V_n(t)$ est analytique en t pour $t>0$, car $(T+\xi)^{-1}$ est analytique en $\xi>0$. En particulier

$$\frac{d}{dt} V_n(t) = -T\ (\mathbb{1}+\frac{t}{n}T)^{-n-1} \in \mathcal{L}(E) \ , \ t>0 \ .$$

Enfin, si $u \in D(T)$,

$$\|(\mathbb{1}+\alpha T)^{-1}u-u\| = \alpha\|(\mathbb{1}+\alpha T)^{-1}Tu\| \leq \alpha\|Tu\| \xrightarrow[\alpha\to o]{} 0 \ ,$$

d'où, puisque $D(T)$ est dense,

(3) $$V_n(t) \xrightarrow[t\to o]{s} V_n(0) = \mathbb{1} \quad \text{(fortement continu en } 0) \ .$$

Maintenant, on peut écrire : (on introduit ε à cause de la non continuité de $V_n'(t)$ quand $t \longrightarrow 0$) .

$$V_n(t)u - V_m(t)u = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \frac{d}{ds}\left[V_m(t-s)\, V_n(s)u\right] ds$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \left[-V_m'(t-s)\, V_n(s)u + V_m(t-s)\, V_n'(s)u\right] ds$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \left[\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m}\right] T^2 (\mathbb{1} + \frac{t-s}{m}T)^{-m-1} (\mathbb{1} + \frac{s}{n}T)^{-n-1} u\, ds\,.$$

Si on suppose que $u \in D(T^2)$, alors, comme la résolvante commute avec T, on a

$$V_n(t)u - V_m(t)u = \int_0^t (\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m})(\mathbb{1} + \frac{t-s}{m}T)^{-m-1} (\mathbb{1} + \frac{s}{n}T)^{-n-1} T^2 u\, ds\,,$$

car ici l'intégrand est continu pour $s \in [0,t]$ à cause de (3). D'où, d'après (2), on a pour $u \in D(T^2)$:

$$\|V_n(t)u - V_m(t)u\| \leqslant \|T^2 u\| \int_0^t (\frac{s}{n} + \frac{t-s}{m})\, ds = \frac{t^2}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) \|T^2 u\|\,.$$

On a donc une suite de Cauchy dans E, qui converge uniformément pour tout un intervalle fini de t et $\forall u \in D(T^2)$.

Or, $D(T^2)$ est dense dans E car $D(T^2) = (T+\xi)^{-1} D(T)$ pour $\xi > 0$ et $R[(T+\xi)^{-1}] = D(T)$ est dense dans E (vérifier en exercice que si $A \in \mathcal{L}(E)$ et $R(A) = D$ dense dans E alors $A\{D\}$ est aussi dense dans E). Comme $\{V_n(t)\}$ est uniformément borné et que $V_n(t)$ converge fortement pour tout u dans un sous-ensemble dense, il en résulte que la limite suivante existe :

$$\Longrightarrow \qquad U(t) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} V_n(t) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} (\mathbb{1} + \frac{t}{n}T)^{-n}\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

On note, <u>par définition</u> $U(t) = e^{-tT}$, mais il reste à vérifier les propriétés de semi-groupe pour $U(t)$.

II. <u>Propriétés de la fonction exponentielle</u> $U(t)$.

1) <u>Norme de</u> $U(t)$ <u>et continuité forte</u>.

Comme la convergence $V_n(t)u \longrightarrow U(t)u$ est uniforme pour t dans tout intervalle fini, et que $V_n(t)u$ est continu en t, alors $U(t)u$ est continu en t.

$$\Longrightarrow \qquad U(t) \text{ est fortement continu pour } t \geqslant 0\,.$$

De plus $\|V_n(t)\| \leqslant 1$ et $V_n(0) = \mathbb{1}$, entraîne

$$\boxed{\|U(t)\| \leq 1} \quad \text{et} \quad \boxed{U(0) = \mathbb{1}} \ .$$

2) <u>Commutativité entre</u> $U(t)$ <u>et</u> T .

On a

$$V_n'(t) = - T(\mathbb{1}+\tfrac{t}{n}T)^{-1} V_n(t) = - V_n(t)T(\mathbb{1}+\tfrac{t}{n}T)^{-1} = - TV_n(t)(\mathbb{1}+\tfrac{t}{n}T)^{-1} \ .$$

Or, pour $u \in D(T)$:

$$T(\mathbb{1}+\tfrac{t}{n}T)^{-1}u = (\mathbb{1}+\tfrac{t}{n}T)^{-1}Tu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tu \qquad (\text{cf. I.(3)}) ,$$

il en résulte que

$$\forall u \in D(T) \ , \ -V_n(t)T(\mathbb{1}+\tfrac{t}{n}T)^{-1}u \longrightarrow -U(t)Tu \ .$$

De même,

$$\forall u \in E \ , \ V_n(t)(\mathbb{1}+\tfrac{t}{n}T)^{-1}u \longrightarrow U(t)u \ ;$$

il vient alors, puisque T est fermé :

$$\forall u \in D(T) \ , \ TU(t)u = U(t)Tu \ ,$$

c'est-à-dire $\boxed{TU(t) \supset U(t)T}$.

3) <u>Propriété de semi-groupe</u>.

Si $u \in D(T)$, on peut écrire :

$$V_n(t)u - u = - \int_0^t (\mathbb{1}+\tfrac{s}{n}T)^{-n-1} \, Tu \, ds \ ,$$

mais $(\mathbb{1}+\tfrac{t}{n}T)^{-n-1} = (\mathbb{1}+\tfrac{t}{n}T)^{-1}V_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{s} U(t)$ uniformément pour t dans tout intervalle fini, d'où, en passant à la limite $n \longrightarrow \infty$:

$$(1) \qquad U(t)u - u = - \int_0^t U(s)Tu \, ds \ , \ \forall u \in D(T) \ .$$

Or $U(s)Tu$ est continu en s , d'où $U(t)u$ est différentiable en t :

$$\forall u \in D(T) \ , \ \frac{d}{dt} U(t)u = - U(t)Tu = -TU(t)u \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Il en résulte que $u(t) = U(t)u_o$ est solution de l'équation différentielle (I.(1)) <u>pourvu que</u> $u_o \in D(T)$.

Montrons maintenant que la solution est unique : soit $u(t)$ continue pour $t \geqslant 0$, telle que $\frac{du}{dt}$ existe pour $t>0$, $u(t) \in D(T)$ pour $t>0$ et $\frac{du}{dt} + Tu = 0$. (On n'a pas supposé que $\frac{du}{dt}$ existe pour $t=0$). Alors, pour $0<s\leqslant t$

$$\frac{d}{ds}[U(t-s)u(s)] = - U'(t-s)u(s) + U(t-s)\, u'(s)$$
$$= U(t-s)Tu(s) - U(t-s)Tu(s) = 0 .$$

On doit en conclure que $U(t-s)u(s)$ est constant pour $s \in [0,t]$: en effet $\forall\, \varepsilon>0$ arbitraire, on montrera que

(2) $$\|U(t-s)u(s) - U(t)u(0)\| \leqslant \varepsilon s , \quad s \in [0,t]$$

alors $U(t-s)u(s) = U(t)u(0)$ s'en suivra (en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$). D'abord, pour $s>0$ assez petit, on a l'inégalité (2), puisque la dérivée à droite est nulle en 0. Soit $[0,c)$ le sous-intervalle maximum de $[0,t)$ dans lequel (2) est vérifiée. Montrons que $c=t$. Si $c<t$, on a $\|U(t-c)u(c) - U(t)u(0)\| \leqslant \varepsilon c$ par continuité. D'où puisque la dérivée est nulle en c,

$$\|U[t-(c+h)]\, u(c+h) - U(t)u_o\| = \|U(t-c)u(c) - U(t)u_o\| + o(h) \leqslant \varepsilon c + o(h)$$
$$\leqslant \varepsilon(c+h)$$

pour h suffisamment petit, d'où la contradiction $\Longrightarrow c = t$ et (2) est vérifiée $\forall\, \varepsilon>0$ sur $[0,t]$.

Il en résulte (en faisant $s=0$, $s=t$, et $s\ \forall$)

(3) $$U(t)u(0) = u(t) = U(t-s)u(s) ,$$

et l'on a prouvé l'unicité de la solution de l'équation différentielle. En outre, (3) montre que $\forall\, u_o \in D(T)$,

$$U(t)u_o = U(t-s)\, U(s)u_o ,$$

c'est-à-dire, comme $D(T)$ est dense dans E, que

(4) $$U(t+s) = U(t).U(s) , \quad t,s \geqslant 0 .$$

La famille $\{U(t)\}$ définie dans I.3) est donc un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés dans E. On dit que le "générateur infinitésimal" de $U(t)$ est $-T$. De plus, comme $\|U(t)\| \leq 1$, on dit que l'on a un semi-groupe de contractions.

III. Semi-groupes bornés et quasi-bornés.

1) Semi-groupes bornés.

Si l'on veut que $-T$ soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe $U(t)$, il n'est pas nécessaire d'imposer à T la condition du §.I,3) sur la résolvante. En effet remplaçons la condition $\|(T+\xi)^{-1}\| \leq \xi^{-1}$ pour $\xi>0$ par la condition plus faible :

(1) $$\|(T+\xi)^{-k}\| \leq M/\xi^k \ , \ \xi>0 \ , \ k=1,2,\ldots$$

où M est indépendant de ξ et de k.

Cette condition entraîne

(2) $$\|(1+\alpha T)^{-k}\| \leq M \ , \ \alpha>0 \ ,$$

et la construction de $U(t)$ du §.I est possible exactement de la même manière (avec (2) à la place de (I.(2)).

Dans ce cas, on aura aisément :

(3) $$\|U(t)\| \leq M \ , \quad U(0) = \mathbb{1} \ , \quad U(t+s) = U(t).U(s) \ , \quad t,s\geq 0$$

et $U(t)u$ continu pour $t\geq 0$.

On dit alors que $\{U(t)\}$ est un semi-groupe borné.

2) Semi-groupes quasi-bornés.

On peut en fait encore remplacer la condition (1) par la condition suivante :

(4) L'intervalle $[\beta,+\infty[$ est inclus dans $\rho(-T)$, et
$$\|(T+\xi)^{-k}\| \leq M(\xi-\beta)^{-k} \ , \quad \xi>\beta, \ k=1,2,3,\ldots$$

Alors, l'opérateur $T_1 = T+\beta$ vérifie les hypothèses du 1), de telle manière que $U_1(t) = e^{-tT_1}$ soit défini. Posons alors

$$U(t) = e^{\beta t}\, U_1(t) ,$$

il est facile de vérifier que $\{U(t)\}$ a toutes les propriétés d'un semi-groupe. De plus, à la place de (3), on a

$$(5) \qquad \|U(t)\| \leqslant M.e^{\beta t} .$$

On dit alors que $\{U(t)\}$ est un semi-groupe quasi-borné.

Enonçons maintenant :

Théorème (Hille - Yosida - Phillips). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire fermé $-T$, de domaine dense, soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu est qu'il existe M et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, \lambda > \beta ,\ \lambda \in \rho(-T) \quad \text{et} \quad \|(T+\lambda)^{-k}\| \leqslant M(\lambda-\beta)^{-k} , \quad k=1,2,\ldots$$

On a alors : $\qquad \|e^{-Tt}\| \leqslant M\, e^{\beta t}$.

Corollaire. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire fermé $-T$, de domaine dense, soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu tel que $\|e^{-Tt}\| \leqslant e^{\beta t}$, est qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, \lambda > \beta,\ \lambda \in \rho(-T)$ et

$$\|(T+\lambda)^{-1}\| \leqslant (\lambda-\beta)^{-1} .$$

Nous avons montré la suffisance des conditions, la nécessité ne sera pas prouvée ici (nous ne l'utiliserons pas dans la suite), mais le lecteur peut consulter, pour celle-ci, la référence [2] .

3) Résolvante du générateur infinitésimal.

On veut montrer la formule utile suivante :

$$(6) \Longrightarrow \qquad (T+\zeta)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\zeta t}\, U(t)\, dt , \quad \mathrm{Re}\, \zeta > \beta ,$$

qui montrera que la résolvante de $-T$ est la transformée de Laplace du semi-groupe $U(t)$.

Définissons l'opérateur $A(\tau)$ par

$$A(\tau)u = \int_0^\tau e^{-\zeta t}\, U(t)u\, dt \quad , \; u \in E \; .$$

L'intégrale est bien définie puisque l'intégrand est continu en t. Le second membre de (6) est par définition un opérateur qui est la limite forte de $A(\tau)$ quand $\tau \to \infty$.

Soit donc $u \in D(T)$, alors $\frac{d}{dt}[U(t)u] = -\, U(t)\, Tu$ et $\frac{d}{dt}[e^{-\zeta t}\, U(t)u] = -\, e^{-\zeta t}\, U(t)(T+\zeta)u$. En intégrant, on obtient

$$u = \int_0^\infty e^{-\zeta t}\, U(t)\, (T+\zeta)u\, dt \; .$$

On pose alors $v = (T+\zeta)u$, et

$$(T+\zeta)^{-1}v = \int_0^\infty e^{-\zeta t}\, U(t)v\, dt \quad \text{si } \zeta \text{ réel, et } \zeta > \beta \quad (\zeta \in \rho(-T)) \; .$$

Or, quand u parcourt $D(T)$, v parcourt E entier, d'où (6) est démontré pour $\zeta > \beta$, ζ réel.

Maintenant, le second membre de (6) est holomorphe en ζ pour $\Re\, \zeta > \beta$, car $\|U(t)\| \leq M\, e^{\beta t}$. Il en résulte que (6) est nécessairement vrai pour $\Re\, \zeta > \beta$ et que l'on a :

$$\|(T+\zeta)^{-1}\| \leq \int_0^\infty M\, e^{-(\Re\, \zeta - \beta)t}\, dt = \frac{M}{\mathrm{Re}\, \zeta - \beta} \; ,$$

ce qui montre que tout le demi-plan $\Re\, \zeta > \beta$ est inclus dans $\rho(-T)$.

IV. Solution de l'équation différentielle non-homogène.

On cherche maintenant la solution de l'équation :

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Tu = f(t) \; , & t > 0 \\ u(0) = u_o \; . \end{cases}$$

Théorème. Soit $-T$ fermé, de domaine dense, générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu dans E, et soit f continûment différentiable pour $t \geq 0$. Alors $\forall\, u_o \in D(T)$, $\exists$ une solution unique de (1), continûment différentiable pour $t > 0$, donnée par l'expression :

$$(2) \qquad u(t) = U(t)u_o + \int_0^t U(t-s)f(s)\, ds \; .$$

Démonstration : L'unicité résulte du même raisonnement que pour l'obtention de (II.3)).

Remarquons maintenant que si $u(t)$ est solution de (1), de la même manière que pour l'obtention de (II.3)) on a

$$\frac{d}{ds}\left[U(t-s)u(s)\right] = U(t-s)f(s) \ .$$

En intégrant sur $(0,t)$ (fortement continu en s), on obtient (2).

Il reste à montrer que, réciproquement, l'intégrale du second membre de (2) satisfait l'équation (1) avec une donnée initiale nulle.

Notons $$v(t) = \int_0^t U(t-s)f(s)\, ds$$

et remarquons que $f(s) = f(0) + \int_0^s f'(r)\, dr$.

Il vient aisément :

$$v(t) = \left[\int_0^t U(t-s)ds\right] f(0) + \int_0^t \left[\int_r^t U(t-s)ds\right] f'(r)\, dr \ .$$

Mais on a

$$(3) \qquad T\int_r^t U(s)\, ds = U(r)-U(t) \ , \quad 0 \leqslant r \leqslant t \ .$$

Pour le démontrer, on commence par considérer $u \in D(T)$, et il est facile de voir que

$$\int_r^t T\, U(s)u\, ds = U(r)u - U(t)u \ ,$$

or, comme T est fermé, en utilisant la définition de l'intégrale comme limite de sommes finies, il vient que

$$T\int_r^t U(s)u\, ds = \left[U(r)-U(t)\right]u \ , \ \forall u \in D(T) \ .$$

Soit alors $u \in E$, $\exists\ u_n \in D(T)$ tels que $u_n \longrightarrow u$ dans E , et

$$\int_r^t U(s)\, u_n\, ds \longrightarrow \int_r^t U(s)\, u\, ds$$

$$\left[U(r)-U(t)\right]u_n \longrightarrow \left[U(r)-U(t)\right]u$$

d'où, puisque T est fermé, l'égalité (3) dans $\mathcal{L}(E)$.

Il résulte de (3), que l'on a

$$(4)\qquad T\int_r^t U(t-s)ds = \mathbb{1} - U(t-r)\ ,\quad 0\leqslant r\leqslant t\ .$$

Grâce à (4), on en déduit que $v(t)\in D(T)$ et que

$$(5)\qquad \begin{aligned} T\,v(t) &= [\mathbb{1}-U(t)]\ f(0) + \int_0^t [\mathbb{1}-U(t-r)]\ f'(r)\ dr \\ &= f(t) - U(t)f(0) - \int_0^t U(t-r)\ f'(r)\ dr\ . \end{aligned}$$

D'autre part,

$$v(t) = \int_0^t U(s)\ f(t-s)\ ds$$

d'où (6) $$\frac{dv(t)}{dt} = U(t)f(0) + \int_0^t U(s)\ f'(t-s)\ ds\ .$$

En comparant (5) et (6), on voit que :

$$\frac{dv(t)}{dt} + T\,v(t) = f(t)$$

ce que nous voulions montrer. La continuité de $f'(t)$ entraîne celle de $\frac{dv}{dt}$ par (6). La vérification de $v(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ est évidente. ∎

V. Semi-groupes holomorphes.

On a vu, d'après la formule (6) du §.III, que la résolvante de $-T$ est la transformée de Laplace du semi-groupe $U(t)$. On est donc tenté d'écrire

$$(1)\qquad U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\zeta t}\ (T+\zeta)^{-1}\ d\zeta$$

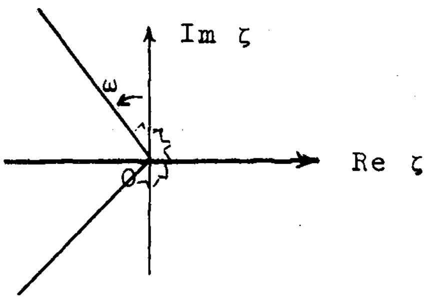
en prenant Γ = ligne droite allant de $c-i\infty$ à $c+i\infty$ avec $c>\beta$, par analogie à la formule d'inversion de la transformée de Laplace. En fait, on peut montrer que si $u\in D(T)$ alors $U(t)u$ admet la représentation (1), mais la démonstration n'est pas facile (cf. référence [3]). C'est pourquoi, nous allons faire ici des hypothèses plus précises sur T , pour justifier (1), ce qui fera apparaître une classe de semi-groupes moins générale.

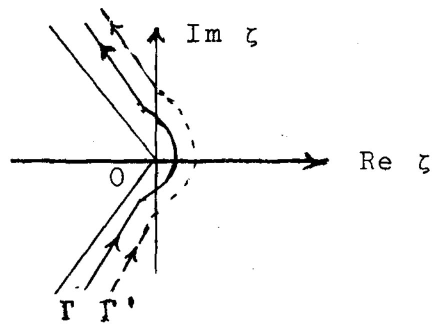
1) Hypothèses sur la résolvante.

On suppose encore que T est fermé, de domaine dense $D(T)$; de plus on fait l'hypothèse que le secteur $|\arg \zeta| < \frac{\pi}{2} + \omega$, $\omega>0$ est inclus dans $\rho(-T)$, et que $\forall \varepsilon>0$, $\exists\ M_\varepsilon$ indépendant de ζ , tel que

(2) $$\|(T+\zeta)^{-1}\| \leqslant \frac{M_\varepsilon}{|\zeta|} \quad \text{pour} \quad |\arg \zeta| \leqslant \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon \ .$$

La courbe Γ choisie est telle que sur la figure : située entièrement dans le secteur $|\arg \zeta| < \frac{\pi}{2}+\omega$ et de branches infinies d'arguments $\pm (\frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon)$, avec $\varepsilon<\omega$.





On remarque que si l'on translate Γ vers la droite, on ne change pas l'intégrale dans (1) (le vérifier en exercice).

2) Vérification des propriétés de semi-groupe.

i) On a

$$U(s)U(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \int_\Gamma e^{\zeta' s+\zeta t}(T+\zeta')^{-1}(T+\zeta)^{-1}\, d\zeta\, d\zeta' ,$$

et en utilisant les identités

$$(T+\zeta')^{-1}(T+\zeta)^{-1} = (\zeta-\zeta')^{-1}[(T+\zeta')^{-1}-(T+\zeta)^{-1}] \qquad (\text{II}.(1)) ,$$

$$\int_\Gamma e^{\zeta t}\,(\zeta-\zeta')^{-1}\, d\zeta = 0 , \quad \int_{\Gamma'} e^{\zeta' s}\,(\zeta-\zeta')^{-1}\, d\zeta' = -2\pi i e^{\zeta s} ,$$

on arrive à :

$$U(s)U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\zeta(t+s)}(T+\zeta)^{-1} d\zeta = U(t+s) .$$

ii) On remarque maintenant que (1) est défini même pour $t \in \mathbb{C}$

tel que $|\arg t|<\omega$, car on peut déformer Γ de manière à assurer $|\arg(t\zeta)|>\frac{\pi}{2}$ pour $\zeta\in\Gamma$ et $|\zeta| \longrightarrow \infty$. Comme on peut dériver en t sous le signe somme, il en résulte que $U(t)$ est holomorphe en t dans le secteur $|\arg t|<\omega$. On a

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta\, e^{\zeta t}(T+\zeta)^{-1}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\zeta t}[\mathbb{I}-T(T+\zeta)^{-1}]\, d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\, T\int_\Gamma e^{\zeta t}(T+\zeta)^{-1}\, d\zeta = -T\, U(t)$$ (calcul justifié puisque T est fermé).

Il en résulte que pour $t>0$,

(3) $$\frac{dU}{dt}\in\mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad \frac{dU}{dt} = -T\, U(t) \supset -\, U(t)T ,$$

la dernière inclusion se déduisant aussi immédiatement de la forme (1) de $U(t)$ et de la commutativité de $(T+\zeta)^{-1}$ avec T .

iii) Posons maintenant dans (1), $\zeta'=\zeta t$, nous obtenons :

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i t}\int_{\Gamma'} e^{\zeta'}\left(T+\frac{\zeta'}{t}\right)^{-1} d\zeta'$$

où l'on peut prendre Γ' indépendant de t . Estimons $U(t)$ pour $|\arg t|\leqslant\omega-\varepsilon$:

pour $\zeta'\in\Gamma'$, on a $\left\|\left(T+\frac{\zeta'}{t}\right)^{-1}\right\| \leqslant \text{cte}\left|\frac{t}{\zeta'}\right|$, d'où

$$\|U(t)\| \leqslant \text{cte}\,.\int_{\Gamma'} e^{\mathrm{Re}\,\zeta'}\ \frac{|d\zeta'|}{|\zeta'|} = \text{cte}.$$

Il en résulte : $\|U(t)\|\leqslant M'_\varepsilon$ pour $|\arg t|\leqslant\omega-\varepsilon$, d'où $\{U(t)\}$ est uniformément borné.

De même on montre, pour $|\arg t|\leqslant\omega-\varepsilon$:

(4) $$\left\|\frac{dU}{dt}\right\| = \|T\, U(t)\| \leqslant M''_\varepsilon |t|^{-1} .$$

De plus, on a aussi, pour $|\arg t|\leqslant\omega-\varepsilon$

$$U(t)-\mathbb{I} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\zeta'}[(tT+\zeta')^{-1}-\zeta'^{-1}]d\zeta' = -\frac{t}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{e^{\zeta'}}{\zeta'}\, T(tT+\zeta')^{-1}\, d\zeta'.$$

Si $u\in D(T)$,

$$\|U(t)u-u\| \leqslant \text{cte}.|t|.\|Tu\|\int_{\Gamma'} e^{\mathrm{Re}\,\zeta'}\,\frac{|d\zeta'|}{|\zeta'|^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Mais, $D(T)$ étant dense dans E, et $\{U(t)\}$ uniformément borné, il en résulte que :

$$\underset{t\to 0}{\text{s-lim}}\, U(t) = U(0) = \mathbb{1} \quad \text{pour} \quad |\arg t| \leq \omega - \varepsilon \quad (\text{définition de } U(0)) .$$

On a donc vérifié toutes les propriétés de semi-groupe pour $\{U(t)\}$; par l'unicité on a donc $U(t) = e^{-tT}$.

Notre semi-groupe a, en fait, des propriétés plus puissantes que celle du §.II : $t \longrightarrow U(t)$ est holomorphe pour $|\arg t| < \omega$, uniformément borné et fortement continu en $t=0$ pour $|\arg t| \leq \omega - \varepsilon$, avec $U(0) = \mathbb{1}$. On dit que l'on a un semi-groupe holomorphe borné.

Remarque. Il n'est pas évident a priori que la condition (2) soit plus forte que la condition (III.(1)). On peut en fait le démontrer (cf. référence [1]).

3) Semi-groupes holomorphes quasi-bornés.

On peut étendre le 2) comme au §.III en considérant les opérateurs T de la forme $T = T_o - \beta\mathbb{1}$ où T_o vérifie les conditions du 2) et $\beta \in \mathbb{R}$. Il est évident que $e^{-tT} = e^{\beta t}\, e^{-tT_o}$ est un semi-groupe holomorphe pour $|\arg t| < \omega$. La seule différence d'avec le 2) est que l'on a :

$$\|e^{-tT}\| \leq M'_\varepsilon |e^{\beta t}| , \quad \forall t \text{ tel que } |\arg t| \leq \omega - \varepsilon .$$

Notons maintenant un théorème que nous utiliserons souvent :

Théorème. Soit T un opérateur m-sectoriel dans un espace de Hilbert H. On note γ le sommet et θ le demi-angle du secteur Σ, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors $-T$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe e^{-tT} pour $|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \theta$, qui vérifie

$$\|e^{-tT}\| \leq e^{-\gamma \operatorname{Re} t} .$$

Démonstration : On a vu au chapitre III que T est fermé de domaine dense $D(T)$. D'autre part on a montré que pour $|\arg \zeta| < \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - \theta) - \varepsilon$, on a

$$\|(T - \gamma + \zeta)^{-1}\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\zeta|} \quad \text{où } M_\varepsilon \text{ est indépendant de } \zeta \quad (\text{cf. V.(3)}).$$

Il en résulte que $T-\gamma\mathbb{1}$ vérifie les conditions du 2), d'où $e^{-(T-\gamma)t}$ est holomorphe pour $|\arg t| < \frac{\pi}{2}-\theta$.
D'autre part, pour $t \geq 0$, on a $\|e^{-(T-\gamma)t}\| \leq 1$, d'après le §.II, et l'on a vu au chapitre III que si $|\alpha| < \frac{\pi}{2}-\theta$, alors

$$\|(e^{i\alpha}(T-\gamma)+\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \text{si} \quad \lambda>0 \quad (\text{cf. V.(2)}) ,$$

d'où

$$\|e^{-e^{i\alpha}(T-\gamma)t}\| \leq 1 \quad \text{pour} \quad t\geq 0 ,$$

enfin

$$\|e^{-(T-\gamma)t}\| \leq 1 \quad \text{pour} \quad |\arg t| < \frac{\pi}{2}-\theta ,$$

et le théorème est démontré. ▮

4) <u>Solution de l'équation différentielle homogène</u>.

D'après les propriétés du semi-groupe holomorphe $U(t) = e^{-tT}$, on sait que pour $t>0$, $u(t) = U(t)u_o \in D(T)$ <u>même si</u> $u_o \in E$.
De plus,

$$\frac{du}{dt}(t) = -T\, u(t) \in E \quad \text{pour} \quad t>0$$

et $u(t) \xrightarrow[t\to o]{} u_o$ dans E .

<u>Remarque 1</u>. On peut montrer facilement que

$$\|\frac{d^nU}{dt^n}(t)\| = \|T^n\, U(t)\| \leq \frac{M_n}{t^n} , \quad t>0 ,$$

d'où, $u(t) \in D(T^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pour $t>0$.

<u>Remarque 2</u>. Pour l'équation différentielle non-homogène on peut améliorer les conditions du théorème du §.IV sur f , mais, si l'on suppose seulement f continue dans E pour tout $t\geq 0$, c'est insuffisant à cause de l'estimation :

$$\|TU(t-s)\, f(s)\| \leq \text{cte} \frac{\|f(s)\|}{t-s} , \quad t>s .$$

On pourrait supposer que f est continue-Höldérienne dans E (cf. référence 1), et cela marcherait alors.

En fait, dans la suite nous utiliserons une propriété, d'une autre nature, faisant intervenir un espace "intermédiaire" entre E

et $D(T)$, de manière à "améliorer" l'estimation ci-dessus.

5) Compacité d'un semi-groupe.

On a vu, dans le cas des semi-groupes holomorphes, que $U(t)$ est uniformément continu pour $t \in [t_o, t_1]$ où $0<t_o<t_1<\infty$ (si $t_o=0$, alors $U(t)$ a un générateur infinitésimal borné). Montrons alors le

Théorème (cf. référence [4]). Soit $\{U(t);\ t \in [0,\infty[\}$ un semi-groupe fortement continu, de générateur infinitésimal $-T$. Si $\{U(t);\ t \in [t_o, t_1], t_o>0\}$ est uniformément continu, et si la résolvante $R(\zeta;T)$ est compacte pour $\zeta \in \rho(T)$, alors $U(t)$ est compact pour $t \geq t_o$.

Démonstration : On va montrer que dans $\mathcal{L}(E)$

$$\zeta(T+\zeta)^{-1}\, U(t_o) \longrightarrow U(t_o)\ , \quad \text{si } \zeta \text{ réel} \longrightarrow \infty\ .$$

Comme l'opérateur du premier membre est compact, à cause de la compacité de $(T+\zeta)^{-1}$ ($\zeta \in \rho(-T)$ pour ζ assez grand), il en résulte que $U(t_o)$ est compact et que, pour $t \geq t_o$

$$U(t) = U(t-t_o)\, U(t_o)$$

est aussi compact.

On a, d'après la formule (III.(6)) :

$$(T+\zeta)^{-1}\, U(t_o) = \int_0^\infty e^{-\zeta t}\, U(t+t_o)dt \quad \text{pour } \zeta \text{ réel} > \beta\ .$$

D'où

$$\zeta(T+\zeta)^{-1}\, U(t_o) - U(t_o) = \int_0^\infty \zeta e^{-\zeta t}[U(t+t_o)-U(t_o)]\, dt\ , \quad \zeta>\beta$$

$$\|\zeta(T+\zeta)^{-1}\, U(t_o) - U(t_o)\| \leq \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\infty\right)|\zeta| e^{-\zeta t}\|U(t+t_o)-U(t_o)\|\, dt = I_1 + I_2.$$

$\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$ tel que

$$\|U(t+t_o)-U(t_o)\| \leq \varepsilon/2 \quad \text{pour } t \in [0,\delta]$$

$$I_1 \leq |\zeta|\frac{\varepsilon}{2}\int_0^\delta e^{-\zeta t}\, dt \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

$$I_2 = |\zeta|\int_\delta^\infty e^{-\zeta t}\|U(t+t_o)-U(t_o)\|dt \leqslant 2M'|\zeta|\int_\delta^\infty e^{(\beta-\zeta)t}dt \leqslant M'' e^{-(\zeta-\beta)\delta} ,$$

pour $\zeta > N(\delta)$, on a $I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $I_1 + I_2 \leqslant \varepsilon$ et l'on a bien démontré que

$$\lim_{\zeta\to\infty}\|\zeta(T+\zeta)^{-1} U(t_o) - U(t_o)\| = 0 . \quad ■$$

6) Adjoint d'un semi-groupe holomorphe dans un Hilbert H .

Lemme. Soit T opérateur fermé dans H de domaine dense $D(T)$, alors T^* est fermé de domaine dense $D(T^*)$.

Démonstration : Supposons qu'il existe $u\in H$ tel que $(v,u) = 0$ $\forall\, v\in D(T^*)$, il s'agit de montrer que $u=0$. En effet, si $u\neq 0$, $(0,u) \notin G(T)$ (graphe de T) . $G(T)$ étant fermé dans $H\times H$, on peut appliquer le théorème du §.I.4) du chapitre 1 (conséquence du Théorème de Hahn-Banach) qui affirme qu'il existe $(x,-y)\in (H\times H)^* = H\times H$ tel que

$$((x,-y), (0,u)) = 1 \quad \text{et} \quad ((x,-y), (u,Tu)) = 0 \quad \forall u\in D(T) .$$

Il en résulte que :
$$\begin{cases} -(y,u) = 1 \\ (x,u) = (y,Tu) \quad \forall u\in D(T) , \end{cases}$$

d'où $y\in D(T^*)$ et $T^*y = x$. Mais ceci est impossible car on doit alors avoir $(y,u) = 0$! . ■

Remarque. Le résultat est encore vrai dans un Banach réflexif.

Supposons maintenant que $T\in\mathcal{F}(H)$, de domaine dense, vérifie

$$\|(T+\zeta\mathbb{I})^{-1}\| \leqslant \frac{M_\varepsilon}{|\zeta-\beta|} \quad \text{pour} \quad |\arg(\zeta-\beta)| \leqslant \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon , \quad \forall\, \varepsilon>0 ,$$

alors on sait que $-T$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe dans le secteur $|\arg t|<\omega$. Montrons que $-T^*$ est aussi générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe dans H et que $(e^{-tT})^* = e^{-tT^*}$.

En effet nous savons, d'après le §.III.3) du chapitre 3 et le §.I.5) du chapitre 2 que l'on a

$$\|R(\zeta;T)\| = \|R(\bar{\zeta};T^*)\| \quad \text{dans } \mathcal{L}(H) .$$

On a donc, pour $|\arg(\zeta-\beta)| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon$,

$$\|(T^*+\zeta\mathbb{1})^{-1}\| \leq \frac{M}{|\zeta-\beta|} ,$$

et comme T^* est fermé de domaine dense, d'après le lemme, $-T^*$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe e^{-tT^*}.
De plus,

$$e^{-tT^*} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\zeta t}(T^*+\zeta\mathbb{1})^{-1}\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar\Gamma} e^{\bar\zeta t}(T^*+\bar\zeta\mathbb{1})^{-1}\, d\bar\zeta$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\zeta t}(T+\zeta\mathbb{1})^{-1} d\zeta\right)^* = (e^{-tT})^* . \blacksquare$$

Remarque. En fait, on peut montrer que si e^{-tT} est un semi-groupe fortement continu dans un Banach réflexif E , alors $(e^{-tT})^* = e^{-tT^*}$ est aussi un semi-groupe fortement continu dans E^* (démonstration plus difficile).

Bibliographie.

[1] T. KATO : Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[2] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ : Linear operators, tome I, Interscience, New York, 1964.

[3] E. HILLE et R.S. PHILLIPS : Functional analysis and semi-groups, American Mathematical Society Colloquium pub., Vol.31, 1957.

[4] A. PAZY : On the differentiability and compactness of semi-groups of linear operators; J. Math. Mech., Vol.17, n°12, 1968, p.1131-1141.

-:-:-:-

Exercices.

1. Soit l'opérateur T défini à l'exercice 5. du chapitre III. Montrer que -T est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe, de contractions, autoadjoint, tel que

$$\|e^{-Tt}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant e^{-\pi^2 \mathcal{R}e\, t} \quad \text{pour } \mathrm{Re}\ t > 0.$$

De plus l'opérateur e^{-Tt} est compact pour $t > 0$.

2. Soit l'opérateur $T_1 = T+S$ défini à l'exercice 6. du chapitre III. Montrer que $-T_1$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe, compact pour $t > 0$.

3. Soit un opérateur T, tel que -T soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu dans le Banach E. Soit $u_o \in E$ tel que $\|e^{-Tt}u_o - u_o\|_E \leqslant C\, t^\alpha$ pour $t \leqslant \tau$, $\alpha > 0$. Montrer que l'on a alors $\|[(1+\varepsilon T)^{-1} - \mathbb{1}]u_o\|_E \leqslant C'\, \varepsilon^\alpha$ pour $\varepsilon \leqslant \delta_o$ ($\exists \delta_o$).

Indications. On peut utiliser l'identité

$$(1+\varepsilon T)^{-1}\, u_o = \int_o^\infty e^{-t}\, e^{-\varepsilon t T}\, u_o\, dt \text{ pour } \varepsilon < 1/\beta.$$

Remarque. Dans le cas où $\{e^{-Tt}\}$ est un semi-groupe holomorphe, les propriétés suivantes sont équivalentes : soit $\alpha \in [0,1[$,

i) u_o vérifie : pour $t \leqslant \tau$ $\|T\, e^{-Tt}u_o\|_E \leqslant \dfrac{C''}{t^{1-\alpha}}$,

ii) u_o vérifie : $\exists\, \delta_o$ tel que si $\varepsilon \leqslant \delta_o$ on ait

$$\|[(1+\varepsilon T)^{-1} - \mathbb{1}]u_o\|_E \leqslant C'\varepsilon^\alpha ,$$

iii) u_o vérifie : pour $t \leqslant \tau$, $\|e^{-Tt}u_o - u_o\|_E \leqslant C\, t^\alpha$.

L'équivalence entre i) et ii) sera prouvée au chapitre VII. (cf. Annexe 2). On vient de voir que iii) entraîne ii) dans un cas plus général . Le fait que ii) entraîne iii) est aisé à montrer en utilisant l'identité (à justifier)

$$e^{-Tt}u_o - u_o = \int_o^t -T\, e^{-T\tau}u_o\, d\tau.$$

4. **Exemple de semi-groupe non holomorphe.**

Soit $E = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ = {fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 à l'∞}, muni de la norme $\|u\|_E = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|$. E est un Banach. Soit l'opérateur

$$T : D(T) = \{u \; ; \; u\in E, \frac{du}{dx}\in E\}, \quad \forall u\in D(T), \; Tu = -\frac{du}{dx}.$$

a) - Montrer que $D(T)$ est dense dans E.

b) - Montrer que T est fermé ($\in \mathcal{F}(E)$).

c) - Montrer que pour $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ et pour $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, la résolvante $(\lambda-T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et est de la forme :

$$v\in E \longrightarrow u(x) = e^{-\lambda x}\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda t}\, v(t)\, dt, \text{ si } \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

$$v\in E \longrightarrow u(x) = -e^{-\lambda x}\int_{x}^{+\infty} e^{\lambda t}\, v(t)\, dt, \text{ si } \mathrm{Re}\,\lambda < 0.$$

d) - Montrer que $\pm T$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions.

Indication. On montre que

$$\text{si } \mathrm{Re}\,\lambda > 0, \; \|(\lambda-T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}$$

$$\text{si } \mathrm{Re}\,\lambda < 0, \; \|(\lambda+T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{-\mathrm{Re}\,\lambda}.$$

On a donc en fait un groupe fortement continu ($e^{T(t_1+t_2)} = e^{Tt_1}.e^{Tt_2}$ $\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$). (On vérifie directement que $e^{Tt}.e^{-Tt} = 1$).

e) - On considère le problème d'évolution :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Tu, \; \begin{cases} u \text{ continu de } [0,+\infty[\text{ dans } E, \text{ dérivable sur } (0,\infty), \\ u(t) \in D(T) \quad \forall t > 0, \end{cases} \\ u(0) = u_0 \in D(T), \end{cases}$$

dont la solution est $e^{Tt}u_0$. Montrer que la fonction $(t,x) \longrightarrow (e^{Tt}u_0)(x)$ vérifie $(e^{Tt}u_0)(x) = u_0(x-t)$, c'est à dire que $\{e^{Tt}\}$ est le groupe des translations.

Remarque sur $\sigma(T)$. On peut montrer que le spectre de T est constitué par la totalité de l'axe des imaginaires.

-:-:-:-

V - Eléments de théorie des perturbations.

-:-:-:-

Eléments de théorie des perturbations.

I. Familles holomorphes de type (A) .

1) Définition.

Une famille $\{T(\lambda)\} \subset \mathcal{F}(E;F)$ est dite holomorphe de type (A) dans le domaine $D_o \subset \mathbb{C}$ si $D(T(\lambda)) = \mathcal{D}$ est indépendant de λ et si $\forall u \in \mathcal{D}$, $\lambda \longrightarrow T(\lambda)u$ est holomorphe dans D_o.

2) Conséquences.

Si $\lambda_o \in D_o$, on peut donc écrire $\forall u \in \mathcal{D}$,

$$T(\lambda)u = T^{(o)}u + (\lambda-\lambda_o)T^{(1)}u + (\lambda-\lambda_o)^2T^{(2)}u + \ldots \tag{1}$$

série qui converge dans un disque $|\lambda-\lambda_o| < r$ (dépendant a priori de u). Les $T^{(i)}$, $i=0,1,2,\ldots$ sont des opérateurs linéaires de E dans F de domaine $\mathcal{D}$, définis grâce à l'unicité du développement (1), et linéaires à cause de la linéarité de $T(\lambda)$. De plus $T^{(o)} = T(\lambda_o)$ est fermé, d'où l'on peut munir $\mathcal{D}$ d'une structure d'espace de Banach avec la norme :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{D}} = \{\|\cdot\|_E^2 + \|T^{(o)}\cdot\|_F^2\}^{1/2} .$$

On a alors $\mathcal{D} \hookrightarrow E$ avec injection continue et $T^{(o)} \in \mathcal{L}(\mathcal{D};F)$.

Maintenant, $T(\lambda)$ est la composition de l'injection bornée $\mathcal{D} \longrightarrow E$ et de $T(\lambda) \in \mathcal{F}(E;F)$, d'où $T(\lambda) \in \mathcal{F}(\mathcal{D};F)$, mais comme le domaine de $T(\lambda)$ est $\mathcal{D}$ entier, on en conclut que $T(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{D};F)$. Enfin, $\forall u \in \mathcal{D}$, $\lambda \longrightarrow T(\lambda)u$ est holomorphe dans D_o , d'où

$$T(\lambda)u = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{T(\lambda')u}{\lambda'-\lambda}\, d\lambda'$$

où Γ est un cercle orienté, contenant λ . De plus, sur Γ , $\|T(\lambda)u\|_F$ vérifie les conditions du "principe de majoration uniforme" (cf. §.II. 2) du chapitre 1), d'où $T(\lambda')$ est borné sur Γ :

$$\|T(\lambda')u\|_F \leq M\|u\|_{\mathcal{D}} \quad , \forall \lambda' \in \Gamma .$$

On a alors

$$\frac{1}{\eta}[T(\lambda+\eta)-T(\lambda)]u - \frac{d}{d\lambda}[T(\lambda)u] = \frac{\eta}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{T(\lambda')u}{(\lambda'-\lambda-\eta)(\lambda'-\lambda)^2}\,d\lambda' ,$$

pourvu que $\lambda+\eta$ soit intérieur à Γ (on a dérivé sous le signe $\int_\Gamma$ pour obtenir $\frac{d}{d\lambda}[T(\lambda)u]$) . Il vient enfin, que l'intégrale du second membre est majorée par un nombre de la forme $|\eta|.M'.\|u\|_{\mathfrak{D}}$ pour $|\eta|$ assez petit. Ceci montre que $\frac{1}{\eta}[T(\lambda+\eta)-T(\lambda)]u \xrightarrow[\eta\to o]{} \frac{d}{d\lambda}[T(\lambda)u]$ uniformément pour $\|u\|_{\mathfrak{D}} \leq 1$. Il en résulte que

$$\frac{1}{\eta}[T(\lambda+\eta)-T(\lambda)] \xrightarrow[\eta\to o]{} T'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}[T(\lambda)]$$

en norme dans $\mathcal{L}(\mathfrak{D};F)$, et donc $\lambda \longrightarrow T(\lambda)$ est holomorphe de D_o dans $\mathcal{L}(\mathfrak{D};F)$. En conséquence, les opérateurs $T^{(n)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{D};F)$ et le rayon de convergence du disque $|\lambda-\lambda_o| < r$ de la formule (1) peut être choisi <u>indépendant de</u> $u \in \mathfrak{D}$.

3) <u>Estimations utiles</u>.

Soit D_1 un compact $\subset D_o \subset \mathbb{C}$, alors $\forall\, \lambda \in D_1$

$$\|T(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{D};F)} \leq M \;, \quad M \text{ indépendant de } \lambda ,$$
$$\|T'(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{D};F)} \leq M_1, \quad M_1 \text{ indépendant de } \lambda ,$$
$$\|T^{(n)}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{D};F)} \leq M_n \;, \quad M_n \text{ indépendant de } \lambda .$$

Exprimons ces inégalités autrement :

(2) $\forall\, u \in \mathfrak{D}$, $\|T(\lambda)u\|_F \leq M\{\|u\|_E^2 + \|T^{(o)}u\|_F^2\}^{1/2}$, $\forall \lambda \in D_1$,

ce qui peut aussi s'écrire : $\forall u \in \mathfrak{D}$

$$\{\|u\|_E^2+\|T(\lambda)u\|_F^2\}^{1/2} \leq \sqrt{M^2+1}\;\{\|u\|_E^2+\|T^{(o)}u\|_F^2\}^{1/2} \;, \quad \forall\, \lambda \in D_1 .$$

Mais, par un raisonnement classique, grâce encore à la compacité de D_1 , on a $\forall\, u \in \mathfrak{D}$

$$\{\|u\|_E^2+\|T(\lambda_1)u\|_F^2\}^{1/2} \leq M'\{\|u\|_E^2+\|T(\lambda_2)u\|_F^2\}^{1/2} \;, \quad \forall\, \lambda_1,\lambda_2 \in D_1$$

(il suffit de construire un réseau fini de λ_i tels que les ouverts $\|T(\lambda)-T(\lambda_i)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D};F)} < \varepsilon$ recouvrent D_1, et d'associer à chaque λ_i une constante M_i du type de M, on trouve alors facilement la constante M'). De même on montrerait que $\forall\, u \in \mathcal{D}$

(3) $$\|T^{(n)}(\lambda)u\|_F \leq M'_n(\|u\|_E^2+\|T(\lambda)u\|_F^2)^{1/2} \quad \forall\, \lambda \in D_1 ,$$

et que $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta$ tel que $|\lambda_1-\lambda_2| \leq \delta$ entraîne

(4) $$\|T(\lambda_1)u-T(\lambda_2)u\|_F \leq \varepsilon\, \{\|u\|_E^2+\|T(\lambda)u\|_F^2\}^{1/2} \quad \forall u\in \mathcal{D} \text{ et } \forall\, \lambda_1,\lambda_2,\lambda\in D$$

Enfin, notons au sujet du développement (1) que l'on a

(5) $$\|T^{(n)}u\|_F \leq \frac{M}{\rho^n}\{\|u\|_E^2+\|T^{(o)}u\|_F^2\}^{1/2} , \quad M \text{ indépendant de } n ,$$

où $\rho>0$ est un nombre plus petit que le rayon de convergence r de la série $\sum_{n=o}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n T^{(n)}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{D};F)$ (si $|\lambda-\lambda_o|=\rho<r$, alors $\|(\lambda-\lambda_o)^n T^{(n)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D};F)} \to 0$ quand $n \to \infty$, d'après le critère de Cauchy, d'où l'inégalité (5)).

4) Analycité de la résolvante.

Montrons d'abord

Lemme 1. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{D};E)$ tel que $T^{-1}\in \mathcal{L}(E;\mathcal{D})$ et soit $A\in \mathcal{L}(\mathcal{D};E)$ tel que $\|A\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, alors

$$(T+A)^{-1}\in \mathcal{L}(E;\mathcal{D}) \quad \text{et}$$

$$(T+A)^{-1} = T^{-1} \sum_{n=o}^{\infty} (-AT^{-1})^n ,$$

de plus $$\|(T+A)^{-1}-T^{-1}\|_{\mathcal{L}(E;\mathcal{D})} \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 . \|A\|}{1-\|A\|\,\|T^{-1}\|} .$$

Démonstration : On remarque d'abord que $AT^{-1}\in \mathcal{L}(E)$ et que $\|AT^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Il en résulte que la série

$$R = \sum_{n=o}^{\infty} (-AT^{-1})^n$$

converge dans $\mathcal{L}(E)$ en norme.

Maintenant $R(\mathbb{1}+AT^{-1}) = (\mathbb{1}+AT^{-1})R = \sum_{n=0}^{\infty} (-AT^{-1})^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-AT^{-1})^{n+1} = \mathbb{1}$,

d'où $(\mathbb{1}+AT^{-1})^{-1} = R \in \mathcal{L}(E)$.

Or, $T+A = (\mathbb{1}+AT^{-1})T$, d'où $T+A$ est inversible et

$(T+A)^{-1} = T^{-1}(\mathbb{1}+AT^{-1})^{-1}$, et la formule cherchée est démontrée.

De plus,

$\|(T+A)^{-1}-T^{-1}\| = \|T^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-AT^{-1})^n\| \leqslant \dfrac{\|T^{-1}\| \, \|AT^{-1}\|}{1-\|AT^{-1}\|}$, et l'on a montré le lemme 1. $\blacksquare$

Supposons maintenant que $E \equiv F$ et que $\zeta_o \in \rho[T(\lambda_o)]$, alors

$$[\zeta_o \mathbb{1} - T(\lambda_o)]^{-1} = R[\zeta_o ; T(\lambda_o)] \in \mathcal{L}(E) .$$

Mais $\zeta_o \mathbb{1} - T(\lambda_o) \in \mathcal{L}(\mathfrak{D};E)$ où $\mathbb{1}$ est ici l'injection canonique bornée de $\mathfrak{D}$ dans E , d'où $R[\zeta_o;T(\lambda_o)] \in \mathcal{F}(E;\mathfrak{D})$, mais comme l'ensemble de définition est E , il en résulte que

$$R[\zeta_o;T(\lambda_o)] \in \mathcal{L}(E;\mathfrak{D}) \hookrightarrow \mathcal{L}(E) .$$

Il résulte alors du lemme 1, que comme $\lambda \longrightarrow T(\lambda)$ est holomorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{D};E)$ et que $R[\zeta_o;T(\lambda_o)] \in \mathcal{L}(E;\mathfrak{D})$, alors $\exists\ \vartheta(\lambda_o)$ tel que pour $\lambda \in \vartheta(\lambda_o)$, $\lambda \longrightarrow R[\zeta_o;T(\lambda)]$ soit holomorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(E;\mathfrak{D}) \hookrightarrow \mathcal{L}(E)$. De plus

$$R[\zeta_o;T(\lambda)] = R[\zeta_o;T(\lambda_o)] \sum_{n=0}^{\infty} \{(T(\lambda)-T(\lambda_o))R[\zeta_o;T(\lambda_o)]\}^n ,$$

$\forall\ \zeta_o \in \rho[T(\lambda_o)]$ et λ tel que $\|T(\lambda)-T(\lambda_o)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{D};E)} < \|R[\zeta_o;T(\lambda_o)\|^{-1}_{\mathcal{L}(E;\mathfrak{D})}$.

Enfin si D_1 est un compact $\subset D_o$ et inclus dans $\rho[T(\lambda_o)]$, on a $\sup_{\zeta \in D_1} \|R[\zeta;T(\lambda_o)]\|_{\mathcal{L}(E;\mathfrak{D})} = M < \infty$, et $\exists\ \vartheta(\lambda_o)$ tel que si $\lambda \in \vartheta(\lambda_o)$, $(\zeta,\lambda) \longrightarrow R[\zeta;T(\lambda)]$ <u>est holomorphe</u> (par rapport au couple de variables). De plus : $\forall\ \lambda \in \vartheta(\lambda_o)$ et $\forall\ \zeta \in D_1$ on a

$$R[\zeta;T(\lambda)] = R[\zeta;T(\lambda_o)] \sum_{n=0}^{\infty} ([T(\lambda)-T(\lambda_o)]R[\zeta;T(\lambda_o)])^n ,$$

c'est-à-dire :

$$(6) \qquad R[\zeta;T(\lambda)] = R[\zeta;T(\lambda_o)] + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n R^{(n)}(\zeta,\lambda_o)$$

où $R^{(n)}(\zeta,\lambda_o) = \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_p=n \\ \nu_j\geq 1}} R[\zeta;T(\lambda_o)]T^{(\nu_1)}R[\zeta;T(\lambda_o)]T^{(\nu_2)}\dots T^{(\nu_p)}R[\zeta;T(\lambda_o)]$.

<u>Remarque</u>. On a montré une sorte de "semi-continuité supérieure" du spectre $\sigma[T(\lambda)]$ en ce sens qu'il ne peut pas s'étendre brusquement. En revanche, il existe des exemples pour lesquels le spectre se réduit brusquement quand $\lambda \longrightarrow \lambda_o$.

5) <u>Projections associées à une séparation du spectre</u>.

Supposons que le spectre $\sigma[T(\lambda_o)]$ soit constitué de deux parties σ_o' et σ_o'' telles qu'il existe une courbe simple rectifiable fermée Γ entourant un voisinage ouvert de σ_o' et extérieure à un voisinage ouvert de σ_o'' . Alors, on peut définir la projection sur un sous-espace $M'(\lambda_o)$ parallèlement au sous-espace supplémentaire $M''(\lambda_o)$:

$$P(\lambda_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R[\zeta;T(\lambda_o)]d\zeta \ .$$

Il résulte du 4), comme Γ est compact $\subset D_o \cap \rho[T(\lambda_o)]$, qu'il existe un voisinage $\vartheta(\lambda_o)$ tel que $(\zeta,\lambda) \longrightarrow R[\zeta;T(\lambda)]$ soit holomorphe pour $\zeta\in\Gamma$ et $\lambda\in\vartheta(\lambda_o)$. D'où $\Gamma\in\rho[T(\lambda)]$ pour $\lambda\in\vartheta(\lambda_o)$ et le spectre de $T(\lambda)$ est lui-même séparé en deux parties par Γ . De plus,

$$P(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R[\zeta;T(\lambda)]d\zeta$$

est une projection, sur un sous-espace $M'(\lambda)$, bien défini et <u>holomorphe, pour</u> $\lambda\in\vartheta(\lambda_o)$, <u>dans</u> $\mathcal{L}(E;\mathcal{D}) \hookrightarrow \mathcal{L}(E)$.

Montrons maintenant :

<u>Lemme 2</u>. <u>Soient</u> P <u>et</u> P_1 <u>deux projections dans</u> E <u>telles que</u> $\|P-P_1\| < \inf(\|P\|^{-1},\|P_1\|^{-1})$, <u>alors si l'une des projections est dégénérée, l'autre l'est aussi et</u>

$$\dim R(P) = \dim R(P_1) \ .$$

<u>Démonstration</u> : Notons $M = R(P)$ et $M_1 = R(P_1)$, alors l'opérateur PP_1P agit de M dans lui-même et, dans M , on a

$$\|PP_1P-P\| = \|P(P_1-P)P\| \leqslant \|P\|\|P_1-P\| < 1 ,$$

car P est l'identité dans M. D'où, l'opérateur

$$PP_1P = P + (PP_1P-P)$$

admet un inverse dans $\mathscr{L}(M)$ et le domaine de valeurs de $PP_1P = M$.
Il en résulte : $(P_1M \subseteq M_1)$,

$$M = PP_1M \subseteq PM_1 \subseteq M ,$$

d'où $$M = PM_1 .$$

Ceci montre que $\dim M \leqslant \dim M_1$. De même on montrerait que
$\dim M \geqslant \dim M_1$, d'où $\dim M = \dim M_1$. ∎

Lemme 3. **Soit** $\lambda \longrightarrow P(\lambda)$ **une projection holomorphe pour** $|\lambda-\lambda_0| < \gamma$ et soit $P(\lambda_0)$ dégénérée de rang m, M_0 étant le sous-espace associé. Alors $\exists\ \delta>0$ tel que si $\{u_1,\dots,u_m\}$ est une base de M_0, **alors** $\{P(\lambda)u_1,\dots,P(\lambda)u_m\}$ **est une base de** $M_\lambda = R(P(\lambda))$ **pour** $|\lambda-\lambda_0| < \delta$.

Démonstration: **D'après le Lemme 2,** $\exists\ \delta$ tel que $|\lambda-\lambda_0| < \delta \Longrightarrow \dim M_\lambda = \dim M_0 = m$; pour cela il suffit que l'on ait $\|P(\lambda_0)-P(\lambda)\| < \inf(\|P(\lambda)\|^{-1},\|P(\lambda_0)\|^{-1})$. Alors, les vecteurs $u_1,\dots,u_m$ engendrent M_0 et $P(\lambda)u_1,\dots,P(\lambda)u_m$ engendrent $P(\lambda)M_0$ de même dimension que M_0 d'après la démonstration du Lemme 2. Les m vecteurs $P(\lambda)u_i$, $i=1,\dots,m$ sont donc linéairement indépendants et forment donc une base de M_λ. ∎

Dans le cas d'une valeur propre isolée ζ_0 de $T(\lambda_0)$, de multiplicité m, on peut calculer le développement en série de Taylor au voisinage de λ_0 de la fonction $\lambda \longrightarrow P(\lambda)$. Pour cela on utilise le développement de $R[\zeta;T(\lambda_0)]$ (cf. §.III.2)) du chapitre 3) :

$$(7)\quad R[\zeta;T(\lambda_0)] = \frac{P}{\zeta-\zeta_0} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{D^n}{(\zeta-\zeta_0)^{n+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k(\zeta-\zeta_0)^k\, S^{k+1} ,$$

où $$\begin{cases} D = [T(\lambda_0)-\zeta_0\mathbb{1}]P , & P \equiv P(\lambda_0) , \\ S = \lim\limits_{\zeta\to\zeta_0} [R[\zeta;T(\lambda_0)](\mathbb{1}-P)] , & \end{cases}$$

et on remarque que $T^{(n)}R[\zeta;T(\lambda_o)]$, $T^{(n)}S$, $T^{(n)}P$, $T^{(n)}D \in \mathcal{L}(E)$ puisque d'après les expressions intégrales du chapitre 2 (§.III.2)), S, P, D $\in \mathcal{L}(E;\mathfrak{D})$. Maintenant, d'après la formule (6) du 4), on obtient finalement :

$$P(\lambda) = \sum_{n=o}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n P^{(n)} \quad \text{où} \quad P^{(o)} \equiv P \equiv P(\lambda_o) \ , \tag{8}$$

et

$$P^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R^{(n)}(\zeta,\lambda_o)d\zeta \ , \tag{9}$$

où $R^{(n)}$ est calculé à l'aide de (6) et (7) .

<u>Exemple</u>. Calcul de $P^{(1)}$.

Calculons d'abord $R^{(1)}(\zeta,\lambda_o)$ d'après (6) :

$$R^{(1)}(\zeta,\lambda_o) = R[\zeta;T(\lambda_o)]\ T^{(1)}\ R[\zeta;T(\lambda_o)] \ .$$

Ensuite il faut calculer le résidu dans la formule (9) en utilisant (7) :

$$P^{(1)} = PT^{(1)}S + ST^{(1)}P + \sum_{n=2}^{m}(-1)^{n-1}[D^{n-1}T^{(1)}S^n+S^nT^{(1)}D^{n-1}] \ . \tag{10}$$

Dans le cas d'une valeur propre semi-simple, m est la dimension du sous-espace propre et D=0 , alors dans (10) le terme entre crochets disparaît.

II. <u>Perturbations analytiques de valeurs propres isolées</u>.

1) <u>Cas général</u>.

Soit ζ_o valeur-propre isolée de $T(\lambda_o)$, de multiplicité m ; on est donc dans la situation du §.I.5) et l'on sait que pour $|\lambda-\lambda_o|< \delta$, on peut définir une projection $P(\lambda)$ holomorphe, dégénérée de rang m , correspondant donc à une partie du spectre de $T(\lambda)$ située strictement à l'intérieur du cercle Γ entourant ζ_o .

Soit maintenant l'opérateur "réduit" $T_r(\lambda) = T(\lambda)P(\lambda) \in \mathcal{L}(E)$ qui représente $T(\lambda)$ dans le sous-espace M_λ et qui vaut 0 ailleurs. D'après le §.III du chapitre 3, le spectre de $T_r(\lambda)$ dans M_λ n'est autre que la partie du spectre de $T(\lambda)$ intérieure à Γ ;

de plus $T_r(\lambda)$ étant de rang fini son spectre est formé uniquement de valeurs propres ζ_i, $i=1,\dots,k$. Le problème est maintenant de savoir quel est le comportement de ces valeurs propres quand $\lambda \to \lambda_o$, sachant déjà qu'elles sont voisines de ζ_o et que leurs multiplicités m_i sont telles que $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$.

Soit alors $\{u_1,\dots,u_m\}$ une base de M_o (sous-espace associé à ζ_o) ; d'après le Lemme 3, $\{P(\lambda)u_1,\dots,P(\lambda)u_m\}$ est une base de M_λ. Définissons alors les coefficients t_{ij} par :

(1) $$T(\lambda)P(\lambda)u_i = \sum_{j=1}^{m} t_{ij}(\lambda)P(\lambda)u_j , \qquad i=1,\dots,m ,$$

et montrons que $\lambda \longrightarrow t_{ij}(\lambda)$ est analytique si $|\lambda-\lambda_o|$ est assez petit.

Soient $\{e_j \,;\, j=1,\dots,m ,\ e_j \in E^*\}$ tels que $(e_j,u_k) = \delta_{jk}$, l'existence des e_j étant assurée par le théorème de Hahn-Banach (cf. §.I.4) du chapitre 1), alors on a

(2) $$(e_k,T(\lambda)P(\lambda)u_i) = \sum_{j=1}^{m} \overline{t_{ij}}(\lambda)(e_k,P(\lambda)u_j) , \qquad k=1,\dots,m .$$

Or $(e_k,P(\lambda_o)u_j) = (e_k,u_j) = \delta_{kj}$, et le déterminant $\Delta(\lambda)$ de la matrice $((e_k,P(\lambda)u_j))$ vaut 1 pour $\lambda=\lambda_o$. D'où $\exists\ \delta_1 \leq \delta$ tel que $[\Delta(\lambda)]^{-1}$ soit borné pour $|\lambda-\lambda_o| < \delta_1 \leq \delta$. Il est donc possible de résoudre (2) par rapport aux t_{ij} de manière à obtenir le quotient d'une fonction analytique par $\Delta(\lambda)$ qui est $\neq 0$. Il en résulte que $\lambda \longrightarrow t_{ij}(\lambda)$ est analytique pour $|\lambda-\lambda_o| < \delta_1$.

La partie du spectre de $T(\lambda)$, intérieure à Γ, est donc constituée par les racines de l'équation

$$\text{dét}((\zeta\delta_{ij}-t_{ij}(\lambda))) = 0 ,$$

qui est un polynôme de degré m en ζ, et dont les coefficients sont des fonctions analytiques de λ, et tel que pour $\lambda=\lambda_o$, ζ_o soit racine multiple d'ordre m. Il en résulte, d'après un résultat de la théorie des équations algébriques, qu'il existe, pour $|\lambda-\lambda_o| < \delta_2 \leq \delta_1$, $k \leq m$ valeurs propres distinctes $\zeta_1(\lambda),\dots,\zeta_k(\lambda)$ et un nombre n, tels que

(3) $$\zeta_j(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{jp}(\lambda-\lambda_o)^{p/n} , \quad a_{jo} = \zeta_o .$$

2) Cas des valeurs-propres simples.

On a alors $m=1$ et $\text{dét}(\zeta\delta_{m}-t_{m}(\lambda)) = 0$ devient

$$\zeta = t(\lambda) \quad \text{avec} \quad t(\lambda_o) = \zeta_o .$$

Il en résulte que $\lambda \longrightarrow \zeta(\lambda)$ est analytique pour $|\lambda-\lambda_o| < \delta_2$ et que l'on peut associer à $\zeta(\lambda)$ un vecteur propre de $T(\lambda)$ lui-même analytique : $u(\lambda) = P(\lambda)u_o$, où u_o est le vecteur propre associé à ζ_o pour $T(\lambda_o)$.

3) Cas des valeurs-propres semi-simples (processus de réduction).

On suppose que ζ_o est valeur-propre semi-simple de $T(\lambda_o)$, c'est-à-dire que $D=0$ (ou encore que l'indice de ζ_o vaut 1). On a alors, d'après le §.III.1) du chapitre 3 :

$$(T(\lambda)-\zeta_o 1)\ P(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\zeta-\zeta_o) R[\zeta;T(\lambda)] d\zeta \in \mathcal{L}(E) ,$$

et l'on peut calculer tous les termes du développement

$$(T(\lambda)-\zeta_o 1)\ P(\lambda) = D + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\ \tilde{T}^{(n)}$$

convergent dans $\mathcal{L}(E)$, avec

$$\tilde{T}^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\zeta-\zeta_o)\ R^{(n)}(\zeta,\lambda_o)\ d\zeta .$$

Ici, $D=0$ et l'on peut définir un opérateur

$$\tilde{T}^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{\lambda-\lambda_o}[T(\lambda)-\zeta_o 1]\ P(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\ \tilde{T}^{(n+1)}$$

qui laisse M_λ invariant et qui vaut 0 ailleurs. A toute valeur-propre $\zeta(\lambda)$ de $T(\lambda)$, telle que $\zeta(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to\lambda_o]{} \zeta_o$, donc valeur-propre de $T(\lambda)\ P(\lambda)$, correspond une valeur-propre $\zeta^{(1)}(\lambda)$ de $\tilde{T}^{(1)}(\lambda)$, et réciproquement, par la relation :

$$\zeta(\lambda) = \zeta_o + (\lambda-\lambda_o)\ \zeta^{(1)}(\lambda) .$$

On est donc ramené à la recherche des valeurs-propres de l'opérateur dégénéré holomorphe $\tilde{T}^{(1)}(\lambda)$, tel que

$$\tilde{T}^{(1)}(\lambda_o) = \tilde{T}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta-\zeta_o)R^{(1)}(\zeta,\lambda_o)d\zeta = PT^{(1)}P \ .$$

Si l'on a m valeurs-propres distinctes $\zeta_i^{(1)}$, $i=1,\ldots,m$ de $PT^{(1)}P$ $[\in \mathscr{L}(M_o)]$, elles sont donc simples et on sait que les valeurs propres de $\tilde{T}^{(1)}(\lambda)$ sont alors holomorphes au voisinage de λ_o . Il en résulte que l'on a alors pour $T(\lambda)$, m valeurs-propres simples distinctes holomorphes au voisinage de λ_o , telles que

$$\zeta_i(\lambda) = \zeta_o + (\lambda-\lambda_o)\zeta_i^{(1)} + O(\lambda-\lambda_o)^2 \ , \ i=1,\ldots,m \ .$$

S'il existe des valeurs-propres multiples pour $PT^{(1)}P$, il faut encore étudier le comportement des valeurs propres de $\tilde{T}^{(1)}(\lambda)$ voisines de celles-ci quand $\lambda \longrightarrow \lambda_o$.

<u>Exemple</u>. Soit l'opérateur suivant dans $\mathbb{C}^2$, dont la matrice relativement à une certaine base, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$$

où les fonctions a, b, c, d sont holomorphes dans D_o . On suppose que pour $\lambda_o \in D_o$, $a(\lambda_o) = d(\lambda_o) = \zeta_o$, $b(\lambda_o) = c(\lambda_o) = 0$. On a alors ζ_o valeur-propre semi-simple, et l'équation caractéristique s'écrit

$$\zeta^2 - (a+d)\zeta + ad - bc = 0 \ .$$

Or le discriminant $\Delta = (a-d)^2+4bc$ admet λ_o comme racine double, d'où $\sqrt{\Delta}$ est analytique au voisinage de λ_o (chaque détermination) et les deux valeurs-propres sont elles-mêmes analytiques de la forme

$$\zeta = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \zeta_o \pm (\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)} + O(\lambda-\lambda_o)^2 \ .$$

Si l'on suppose maintenant que $b(\lambda_o) = 1$, $c(\lambda_o) = 0$, ζ_o est valeur-propre double, non semi-simple, et l'on voit immédiatement que

$$\zeta = \zeta_o + (\lambda-\lambda_o)^{1/2}\zeta^{(1)} + O(\lambda-\lambda_o) \quad \text{(2 déterminations).}$$

III. Perturbations analytiques des semi-groupes holomorphes.

Montrons d'abord :

1) Lemme.

Soit $T \in \mathcal{F}(E)$, *de domaine dense* $D(T)$, *tel que* $\forall \alpha > 0$ $\exists M_\alpha$ *vérifiant*

(1) $$\|(T+\beta+\zeta)^{-1}\| \leq \frac{M_\alpha}{|\zeta|} \quad \text{pour} \quad |\arg \zeta| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\alpha \ .$$

Soit aussi un opérateur linéaire A *tel que* $D(A) \supset D(T)$ *et*

(2) $$\|Au\| \leq a\|u\| + b\|Tu\| \ , \quad \forall u \in D(T) \ .$$

Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \gamma$ *et* δ *tels que si* $a < \delta$ *et* $b < \delta$, *alors* $-(T+A)$ *est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe dans le secteur* $|\arg t| \leq \omega-\varepsilon$, *et* $e^{-t(T+A)}$ *vérifie*

$$\|e^{-t(T+A)}\| \leq M'_\alpha |e^{\gamma t}| \quad \forall t \text{ tel que } |\arg t| \leq \omega-\varepsilon-\alpha \ .$$

Démonstration : L'inégalité (2) entraîne que

$$\|A(T+\beta+\zeta)^{-1}\| \leq a\|(T+\beta+\zeta)^{-1}\| + b\|T(T+\beta+\zeta)^{-1}\| \ .$$

Si $|\arg \zeta| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon$, on a

$$\|T(T+\beta+\zeta)^{-1}\| = \|1-(\beta+\zeta)(T+\beta+\zeta)^{-1}\| \leq 1 + \frac{M_\varepsilon}{|\zeta|}|\beta+\zeta| \ ,$$

d'où

$$\|A(T+\beta+\zeta)^{-1}\| \leq a\frac{M_\varepsilon}{|\zeta|} + b\left[1+\frac{M_\varepsilon}{|\zeta|}(\beta+|\zeta|)\right] \ .$$

$\exists \gamma_1 \geq 0$ tel que si $|\arg(\zeta-\gamma_1)| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon$, alors $\exists \delta(\gamma_1) > 0$ tel que a et $b < \delta(\gamma_1)$ entraîne

$$\|A(T+\beta+\zeta)^{-1}\| < 1 \ .$$

D'où, la série représentant

$$(T+\beta+A+\zeta)^{-1} = (T+\beta+\zeta)^{-1}\left[1 + A(T+\beta+\zeta)^{-1}\right]^{-1}$$

converge dans $\mathcal{L}(E)$ (cf. Lemme 1 du §.I.4)). De plus, on a

$$\|(T+\beta+\zeta+A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|(T+\beta+\zeta)^{-1}\|}{1-\|A(T+\beta+\zeta)^{-1}\|} \leqslant \frac{M_\varepsilon}{|\zeta|-(aM_\varepsilon+b\beta M_\varepsilon)-|\zeta|b(1+M_\varepsilon)} .$$

Il est alors facile de choisir un nombre $\gamma_2 \geqslant \gamma_1$ tel que si $|\arg(\zeta-\gamma_2)| \leqslant \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon$, alors

$$\frac{|\zeta-\gamma_2|}{|\zeta|-M_\varepsilon(a+b\beta)[1-b(1+M_\varepsilon)]^{-1}} \leqslant M ,$$

et il vient

$$\|(T+\beta+\zeta+A)^{-1}\| \leqslant \frac{M'_\varepsilon}{|\zeta-\gamma_2|} \quad \forall\, \zeta \quad \text{tel que} \quad |\arg(\zeta-\gamma_2)| \leqslant \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon ,$$

d'où le Lemme avec $\gamma = \beta+\gamma_2$. ∎

2) Théorème.

Soit $\{T(\lambda)\} \subset \mathcal{F}(E)$ une famille holomorphe de type (A) , de domaine dense, définie dans $\mathcal{V}(\lambda_o)$. Si $-T(\lambda_o)$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe, il en est encore ainsi pour $-T(\lambda)$ si $|\lambda-\lambda_o|$ est assez petit. De plus, la fonction $(\lambda,t) \longrightarrow e^{-tT(\lambda)}$ est holomorphe pour $|\lambda-\lambda_o| < \delta$ et t dans un secteur $|\arg t| < \omega$. Enfin $t \longrightarrow \frac{\partial^n e^{-tT(\lambda)}}{\partial\lambda^n}$ est fortement continu en 0^+ .

Démonstration : L'opérateur $A = T(\lambda)-T(\lambda_o)$ vérifie l'inégalité (2) du Lemme, grâce à l'inégalité (4) du §.I avec a et b aussi petits que l'on veut, suivant le voisinage $\mathcal{V}(\lambda_o)$ choisi. Il en résulte, d'après le Lemme que $-T(\lambda)$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe tel que

$$\|e^{-tT(\lambda)}\| \leqslant M'_\varepsilon |e^{\gamma t}| \quad \forall\, t \quad \text{tel que} \quad |\arg t| \leqslant \omega-\varepsilon ,$$

car on peut choisir ω, M'_ε et γ indépendants de $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$.

Considérons alors l'expression de $e^{-tT(\lambda)}$ pour $t>0$:

$$(3) \qquad e^{-tT(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\zeta t}(T(\lambda)+\zeta\mathbb{1})^{-1}\,d\zeta$$

où Γ est une courbe que l'on a définie au §.V.1) du chapitre 4 (translatée de $(+\gamma)$ vers la droite). Si l'on veut justifier la dérivation par rapport à λ sous le signe $\int$, il nous faut estimer

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(T(\lambda)+\zeta\mathbb{1})^{-1} = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{(T(\lambda')+\zeta\mathbb{1})^{-1}}{(\lambda'-\lambda)^{n+1}}\,d\lambda' ,$$

où C est un cercle de $\mathbb{C}$ entourant λ dans D_o. On utilise alors l'inégalité, indépendante de $\lambda\in\mathcal{V}(\lambda_o)$:

$$\|(T(\lambda)+\zeta\mathbb{1})^{-1}\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\zeta-\gamma|} \quad \text{pour} \quad |\arg(\zeta-\gamma)| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon.$$

et on arrive à

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}(T(\lambda)+\zeta 1)^{-1}\right\| \leq \frac{M_\varepsilon n!N^n}{|\zeta-\gamma|} ,$$

où N est une constante pour $\lambda\in\mathcal{V}(\lambda_o)$, ce qui justifie la formule

$$(4) \qquad \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}e^{-tT(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\zeta t}\frac{d^n}{d\lambda^n}(T(\lambda)+\zeta 1)^{-1}\,d\zeta .$$

On montre alors, de la même manière qu'au §.V.2).ii) du chapitre 4 que $t \longrightarrow \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}e^{-tT(\lambda)}$ est holomorphe dans le secteur $|\arg t|<\omega$, pour $\lambda\in\mathcal{V}(\lambda_o)$. Il résulte de ceci que la fonction $(\lambda,t)\longrightarrow e^{-tT(\lambda)}$ est holomorphe pour $|\arg t|<\omega$ et $\lambda\in\mathcal{V}(\lambda_o)$. Enfin, on montre comme au §.V.2).iii) du chapitre 4 que

$t \longrightarrow \frac{\partial^n e^{-tT(\lambda)}}{\partial\lambda^n}$ est fortement continu* en 0^+. ∎

<u>Remarque</u>. Si on note

$$e^{-tT(\lambda)} = e^{-tT(\lambda_o)} + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_o)^n U^{(n)}(t,\lambda_o) ,$$

alors, d'après la formule (6) du §.I.4), on a

$$U^{(n)}(t,\lambda_o) = \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\zeta t} R^{(n)}(-\zeta,\lambda_o)\,d\zeta ,$$

* Cf. la démonstration en Annexe.

avec $\|R^{(n)}(-\zeta,\lambda_o)\| \leqslant \frac{M_\varepsilon N^n}{|\zeta-\gamma|}$ pour $|\arg(\zeta-\gamma)| \leqslant \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon$.

Il en résulte que $t \longrightarrow U^{(n)}(t,\lambda_o)$ est holomorphe dans le secteur $|\arg t| < \omega$ et que pour $|\arg t| \leqslant \omega-\varepsilon$

$$\|U^{(n)}(t,\lambda_o)\| \leqslant M'_\varepsilon N^n |e^{\gamma t}|$$

$$\left\|\frac{dU^{(n)}}{dt}(t,\lambda_o)\right\| \leqslant \frac{M''_\varepsilon N^n}{|t|} \qquad (|t|<T) .$$

D'autre part, d'après la forme de $R^{(n)}(-\zeta,\lambda_o)$, on a aussi

$$\|T(\lambda_o)\, U^{(n)}(t,\lambda_o)\| \leqslant \frac{M'''_\varepsilon N^n}{|t|} , \quad |t|<T , \quad |\arg t| \leqslant \omega-\varepsilon ,$$

T fini fixé.

Enfin, on a $U^{(n)}(t,\lambda_o)u \underset{t\to o}{\longrightarrow} 0$, $u\in E$, $n\geqslant 1$, ce qui d'ailleurs, peut se vérifier directement (utilisant l'expression de $R^{(n)}(\zeta,\lambda_o)$ et la méthode du chapitre 4, §.5.2)).

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> H <u>un Hilbert et soit</u> $\{T(\lambda)\}\subset\mathcal{F}(H)$ <u>une famille holomorphe de type (A) dans</u> $D_o\subset\mathbb{C}$, <u>telle que</u> $\forall\,\lambda\in D_o$, <u>l'opérateur</u> $T(\lambda)$ <u>soit</u> m-<u>sectoriel dans</u> H <u>de sommet</u> γ_λ <u>et de demi-angle</u> $\theta_\lambda < \frac{\pi}{2}$. <u>Alors si</u> D_1 <u>est un compact</u> $\subset D_o$, $\exists\ \omega>0$ <u>tel que la fonction</u> $(\lambda,t) \longrightarrow e^{-tT(\lambda)}$ <u>soit holomorphe pour</u> $\lambda\in D_1$ <u>et</u> t <u>dans le secteur</u> $|\arg t| < \omega$. <u>De plus</u> $t \longrightarrow \frac{\partial^n e^{-tT(\lambda)}}{\partial\lambda^n}$ <u>est fortement continu en</u> 0^+ <u>et on a</u> $\|e^{-tT(\lambda)}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant e^{-\gamma_\lambda \mathrm{Re}\, t}$.

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème du §.V.3) du chapitre 4, le résultat est évident. ∎

3) <u>Estimations utiles dans le cas des hypothèses du Corollaire</u>.

On a vu au §.V.2).iii.du chapitre 4 que l'on a

$$\|T(\lambda)\, e^{-tT(\lambda)}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{k'(\lambda)}{t} \quad \text{pour} \quad t\in\mathcal{V}^+(0)\subset\mathbb{R} . \tag{5}$$

D'après la démonstration de (5) et la démonstration du Lemme précédent, il est immédiat de voir que pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$ on peut trouver une constante k' indépendante de λ .

Munissons $\mathfrak{D}$ de la structure hilbertienne définie par le produit scalaire suivant :

$$(.,.)_{\mathfrak{D}} = (T(\lambda_o).,T(\lambda_o).)_H + (.,.)_H \quad , \qquad \lambda_o \in D_o \ ,$$

alors, pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$, on a les estimations suivantes :

$$(6) \qquad \|e^{-tT(\lambda)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{D})} \leqslant k_o\, e^{-\gamma_\lambda t} \quad , \quad t \geqslant 0 \ ,$$

$$(7) \qquad \|e^{-tT(\lambda)}\|_{\mathcal{L}(H;\mathfrak{D})} \leqslant k_1(1+1/t)\, e^{-\gamma_\lambda t} \quad , \quad t>0 \ .$$

<u>Démonstration</u> : On a vu au §.I.3) que $\forall\, \varepsilon>0$, $\varepsilon<1$, $\exists\, \delta>0$ tel que $|\lambda-\lambda_o| < \delta$ entraîne $\|T(\lambda)-T(\lambda_o)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{D};H)} \leqslant \varepsilon$. D'où, si $u \in H$, on a

$$\|e^{-tT(\lambda)}u\|_{\mathfrak{D}} = \{\|T(\lambda_o)\, e^{-tT(\lambda)}u\|_H^2 + \|e^{-tT(\lambda)}u\|_H^2\}^{1/2}$$
$$\leqslant \{(\|T(\lambda)\, e^{-tT(\lambda)}u\|_H + \varepsilon\|e^{-tT(\lambda)}u\|_{\mathfrak{D}})^2 + \|e^{-tT(\lambda)}u\|_H^2\}^{1/2}$$
$$\leqslant \varepsilon\,\|e^{-tT(\lambda)}u\|_{\mathfrak{D}} + \{\|T(\lambda)\, e^{-tT(\lambda)}u\|_H^2 + \|e^{-tT(\lambda)}u\|_H^2\}^{1/2} \ .$$

Finalement, si $u \in H$, en utilisant (5), il est immédiat que l'on a $\|e^{-tT(\lambda)}\|_{\mathcal{L}(H;\mathfrak{D})} \leqslant \frac{k_1}{t}$ pour $t \in \mathcal{V}^+(0)-\{0\}$, et pour une certaine constante k_1 .

Maintenant, si $u \in \mathfrak{D}$,

$$(1-\varepsilon)\|e^{-tT(\lambda)}u\|_{\mathfrak{D}} \leqslant \|e^{-tT(\lambda)}\|_{\mathcal{L}(H)}\{(\|T(\lambda_o)u\|_H+\varepsilon\|u\|_{\mathfrak{D}})^2 + \|u\|_H^2\}^{1/2} \ ,$$

d'où

$$\|e^{-tT(\lambda)}|_{\mathcal{L}(\mathfrak{D})} \leqslant (1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}\|e^{-tT(\lambda)}\|_{\mathcal{L}(H)} \quad \forall\, t \geqslant 0$$

où ε et $\mathcal{V}(\lambda_o)$ sont fixés. Il en résulte, grâce au Corollaire du 2) l'inégalité (6). Pour obtenir (7), remarquons que l'on a pour $t>\tau>0$, $\tau \in \mathcal{V}^+(o)$,

$$e^{-tT(\lambda)} = e^{-(t-\tau)T(\lambda)}.e^{-\tau T(\lambda)} \ ,$$

où $e^{-\tau T(\lambda)} \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D})$ comme vu plus haut, et $e^{-(t-\tau)T(\lambda)} \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ avec l'inégalité (6). ∎

Soit maintenant une séparation du spectre de $T(\lambda)$: $\sigma'_\lambda \cup \sigma''_\lambda$ telle que celle décrite au §.I.5), et soit $P(\lambda)$ la projection associée à la partie σ'_λ. Il s'agit d'estimer $e^{-tT(\lambda)}P(\lambda)$ et $e^{-tT(\lambda)}[\mathbb{1}-P(\lambda)]$ dans le cas où l'on suppose que $\zeta \in \sigma''_\lambda \Longrightarrow \mathrm{Re}\,\zeta > \tilde{\xi} > 0$.

Pour cela considérons la formule (3), on remarque immédiatement que $P(\lambda)$ et $e^{-tT(\lambda)}$ commutent. D'autre part, comme $(T(\lambda)+\zeta\mathbb{1})^{-1}[\mathbb{1}-P(\lambda)]$ est holomorphe en ζ pour $-\zeta \in \sigma'_\lambda \cup \rho[T(\lambda)]$ (cf. §.III.1) du chapitre 3), on peut déformer le contour Γ, dans l'expression de $e^{-tT(\lambda)}[\mathbb{1}-P(\lambda)]$, de manière à ce, qu'en dehors des demi-droites constituant ses branches infinies, on ait un segment parallèle à l'axe des imaginaires d'abscisse $-\tilde{\xi}$ (dont la distance à $-\sigma''_\lambda$ est $\neq 0$, puisque le segment est un compact de $\mathbb{C}$ et que σ''_λ est fermé). On a donc aisément :

$$(8) \qquad \| e^{-tT(\lambda)}[\mathbb{1}-P(\lambda)] \|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant k'_0 \, e^{-\tilde{\xi}t} ,$$

puis, de la même manière que pour (6) et (7) :

$$(9) \qquad \| e^{-tT(\lambda)}[\mathbb{1}-P(\lambda)] \|_{\mathcal{L}(\mathcal{D})} \leqslant k''_0 \, e^{-\tilde{\xi}t} , \quad t \geqslant 0 ,$$

$$(10) \qquad \| e^{-tT(\lambda)}[\mathbb{1}-P(\lambda)] \|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})} \leqslant k'_1 (1+t^{-1}) \, e^{-\tilde{\xi}t} , \quad t > 0 .$$

Notons maintenant $M_\lambda = R[P(\lambda)]$, alors on peut définir le groupe $e^{-tT_M(\lambda)}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(M_\lambda)$ puisque $T_M(\lambda)$ est borné. D'autre part, en utilisant (3) on a :

$$P(\lambda)\, e^{-tT(\lambda)} = e^{-tT(\lambda)}P(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\zeta t}(T_M(\lambda)+\zeta\mathbb{1})^{-1}P(\lambda)\, d\zeta ,$$

ce qui prouve que $e^{-tT(\lambda)}P(\lambda) = e^{-tT_M(\lambda)}$ sur M_λ, $t \geqslant 0$.
De plus, comme $P(\lambda) \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D})$, l'opérateur $e^{-tT_M(\lambda)}P(\lambda) \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D})$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Enfin, si l'on note Γ_1 une courbe simple fermée entourant $-\sigma'_\lambda$ telle que celle du §.I.5), on peut écrire :

$$(11) \qquad e^{-tT(\lambda)}P(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} e^{\zeta t}(T(\lambda)+\zeta\mathbb{1})^{-1}P(\lambda)\, d\zeta , \quad t \in \mathbb{R}$$

puisque $(T(\lambda) + \zeta\mathbb{1})^{-1}P(\lambda)$ est holomorphe en ζ pour $-\zeta \in \rho[T(\lambda)] \cup \sigma''_\lambda$, que pour tout $t>0$ on peut remplacer Γ par Γ_1 grâce aux propriétés de décroissance à l'infini* de $\|(T(\lambda)+\zeta\mathbb{1})^{-1}P(\lambda)\|_{\mathcal{L}(H)}$, et que le second membre est analytique en $t \in \mathbb{C}$, comme $e^{-tT_M(\lambda)}$. Il résulte de (11) que si $\forall \zeta \in \sigma'_\lambda$, $|\lambda-\lambda_o| \leqslant \delta$, on a $a < \operatorname{Re} \zeta < b$, et l'estimation :

(12) $$\|e^{-tT(\lambda)}P(\lambda)\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})} \leqslant k_2 \sup(e^{-bt}, e^{-at}) , \quad t \in \mathbb{R},$$

(si $t>0$, ce sera $k_2\, e^{-at}$, si $t<0$ ce sera $k_2\, e^{-bt}$), ce qui illustre l'aspect "régularisant" de P (en général $\mathcal{D}$ est strictement inclus dans H et contient donc des fonctions plus "régulières").

<u>Annexe</u>.

Montrons que $t \longrightarrow \dfrac{\partial^n e^{-tT(\lambda)}}{\partial\lambda^n}$ est fortement continu en 0^+.

Pour cela montrons d'abord que cette famille d'opérateurs est uniformément bornée pour $|\arg t| \leqslant \omega-\varepsilon$, puis nous montrerons que si $u \in \mathcal{D}$ alors $\dfrac{\partial^n e^{-tT(\lambda)}}{\partial\lambda^n}\, u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, ce qui donnera la conclusion cherchée grâce à la densité de $\mathcal{D}$ dans E.

a) - On sait déjà que $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n} (T(\lambda)+\zeta\mathbb{1})^{-1}\right\| \leqslant \frac{M_\varepsilon\, n!\, N^n}{|\zeta-\gamma|}$$

pour $|\arg(\zeta-\gamma)| \leqslant \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon$.

En posant alors $(\zeta-\gamma)t = \zeta'$ dans l'intégrale représentant $\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^{-tT(\lambda)}$, et en choisissant Γ' indépendant de t, on obtient la majoration : $\left\|\dfrac{\partial^n e^{-tT(\lambda)}}{\partial\lambda^n}\right\| \leqslant \text{cte}.|e^{\gamma t}|.\displaystyle\int_{\Gamma'} e^{\operatorname{Re}\zeta'} \left|\frac{d\zeta'}{\zeta'}\right|$ pour $|\arg t| \leqslant \omega-\varepsilon$.

Il en résulte immédiatement :

$$\left\|\frac{\partial^n e^{-tT(\lambda)}}{\partial\lambda^n}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant M'_\varepsilon\, n!\, N^n |e^{\gamma t}|.$$

---

* On a $(T(\lambda)+\zeta\mathbb{1})^{-1}P(\lambda) = (T(\lambda)P(\lambda) + \zeta\mathbb{1})^{-1}P(\lambda)$ et $T(\lambda)P(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$.

b) - Soit $u \in \mathcal{D}$, on a alors $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$

$$(T(\lambda) + \zeta \mathbb{1})^{-1}u = [\zeta^{-1} \mathbb{1} - \zeta^{-1}T(\lambda) \ (T(\lambda) + \zeta \mathbb{1})^{-1}]u,$$

et il en résulte d'après la forme de $\frac{d^n}{d\lambda^n}(T(\lambda) + \zeta \mathbb{1})^{-1}$, la majoration

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}(T(\lambda)+\zeta 1)^{-1}u \right\|_E \leq \frac{M_\varepsilon n! \ N^n}{|\zeta| \, |\zeta-\gamma|} \cdot \sup_{\lambda' \in C} \|T(\lambda')u\|_E \ ,$$

$$\text{pour } \arg|\zeta-\gamma| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon \text{ et } \zeta \neq 0 \ .$$

Comme $u \in \mathcal{D}$ on a $\sup_{\lambda' \in C} \|T(\lambda')u\|_E \leq K$. Il suffit alors de refaire le raisonnement du a) pour $|t| \leq \delta$ assez petit pour choisir Γ' indépendant de t (à cause du dénominateur $|\zeta'+\gamma t| \cdot |\zeta'|$), et l'on voit que $|t|$ est en facteur dans la majoration finale. ▨

-:-:-:-

Exercices.

1. Soit $\{T(\lambda)\}$ une famille holomorphe de type (A) dans le Banach E. Soit ζ_o une valeur propre isolée semi-simple, de multiplicité m de $T(\lambda_o) = T^{(o)}$. D'après (I,10) on a :

$$P(\lambda) = P^{(o)}+(\lambda-\lambda_o)P^{(1)}+O[(\lambda-\lambda_o)^2]$$

avec $P^{(1)} = P^{(o)}\,T^{(1)}\,S + S\,T^{(1)}\,P^{(o)}$

et $S(\zeta_o-T^{(o)}) \subset (\zeta_o-T^{(o)})S = 1-P^{(o)}$.

Soit $\tilde{T}(\lambda) = \dfrac{(T(\lambda)-\zeta_o 1)P(\lambda)}{\lambda-\lambda_o} = \sum_{n=o}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n \tilde{T}^{(n+1)}$.

a) - Retrouver $\tilde{T}^{(1)} = P^{(o)}T^{(1)}P^{(o)}$ en utilisant uniquement les développements de $P(\lambda)$ et $T(\lambda)$.

b) - Montrer que l'on a (cf. chapitre III, §III. 3)

$$P^{(o)} = \sum_{j=1}^{m} (\cdot,e_j)v_j$$

où $\{v_j\}$ est une base du sous-espace M_o, et $\{e_j\}$ un système de vecteurs propres de $(T^{(o)})^*$, pour la valeur propre $\bar{\zeta}_o$, tels que $(e_j,v_k) = \delta_{jk}$.

c) - Dans le cas où il existe m valeurs propres simples $\zeta_i^{(1)}$, i=1,....,m, de $\tilde{T}^{(1)}$, en tant qu'opérateur dans M_o, montrer qu'il existe m vecteurs propres, analytiques au voisinage de λ_o, $V_i(\lambda)$ associés aux m valeurs propres simples de $T(\lambda)$ (pour $\lambda\neq\lambda_o$), tels que $\{V_i(\lambda_o)\}_{i=1,....,m}$ soit une base de M_o .

2. <u>Calcul pratique des valeurs propres et vecteurs propres si</u> ζ_o <u>est valeur propre simple de</u> $T^{(o)}$.

On sait que dans ce cas la valeur propre voisine de ζ_o s'écrit

$$\zeta(\lambda) = \zeta_o + (\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)} + \ldots + (\lambda-\lambda_o)^n\zeta^{(n)}+ \ldots \text{ pour}$$

$\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$.

De plus le vecteur $v(\lambda) = P(\lambda)\,v_o = v_o+(\lambda-\lambda_o)\,v^{(1)}+ \ldots +(\lambda-\lambda_o)^n v^{(n)}+\ldots$

où $\|v_o\| = 1$ et $(T^{(o)}-\zeta_o)v_o = 0$, est vecteur associé à $\zeta(\lambda)$. Or on remarque que l'expression de $P(\lambda)$ n'est pas facile à manoeuvrer, il est donc souhaitable de chercher un vecteur propre $v'(\lambda)=k(\lambda)v(\lambda)$ plus facile à calculer, où $k(\lambda)$ est une fonction scalaire analytique au voisinage de λ_o.

Soit w_o le vecteur propre de $(T^{(o)})^*$ associé à $\overline{\zeta}_o$, tel que
$(v_o,w_o) = 1$,

posons $k(\lambda) = (P(\lambda)v_o,w_o)^{-1}$.

a) - Montrer que cette relation définit bien une fonction k analytique au voisinage de λ_o. Montrer qu'en outre

$$k(\lambda) = 1+O[(\lambda-\lambda_o)^2].$$

b) - On a maintenant pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$:

$$v'(\lambda) = v_o+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_o)^n v'_n \qquad (v'_1 = v^{(1)}).$$

Donner un mode de calcul simple pour les v'_n et $\zeta^{(n)}$.

Indication. On a $(v'(\lambda),w_o) = 1$, d'où $P^{(o)}v'_n = 0$, $n \geq 1$, et on identifie les puissances successives de $\lambda-\lambda_o$ dans l'expression $[\zeta(\lambda)-T(\lambda)]v'(\lambda) = 0$.

On obtient : $\zeta^{(1)} = (T^{(1)}v_o,w_o)$,

$v^{(1)} = v'_1 = S\,T^{(1)}v_o$,

on obtient $\zeta^{(n)}$ en faisant le produit scalaire avec w_o du coefficient de $(\lambda-\lambda_o)^n$. Ensuite v'_n est déterminé en appliquant S à ce coefficient.

3. Application du 2.

Soit $\{T(\lambda)\}$ défini par : $\mathcal{D} = H^2(0,1)\cap H_o^1(0,1)$ (cf. exercice 5. du chapitre III.), $\forall u \in \mathcal{D}$, $T(\lambda)u = -\dfrac{d^2u}{dx^2}+\lambda x\dfrac{du}{dx}$.

On connaît le spectre de $T(o)$ qui est autoadjoint :

$\zeta_k^{(o)} = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}^*$ et les vecteurs propres $v_k^{(o)} = \sin k\pi x$.

Montrer que si l'on écrit les valeurs propres de $T(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathfrak{V}(\lambda_o)$

$$\zeta_k(\lambda) = \zeta_k^{(o)} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \zeta_k^{(n)} ,$$

alors $\zeta_k^{(1)} = -\frac{1}{2}$, $v_k^{(1)} = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{8k^2\pi^2}\right)\sin k\pi x$

et $\zeta_k^{(2)} = (T^{(1)} v_k^{(1)}, 2v_k^{(o)})$ où $T^{(1)}u = x \frac{du}{dx}$.

N.B. On montre que $w_k^{(o)} = 2v_k^{(o)}$.

-:-:-:-

VI - Rappels sur les opérateurs non-linéaires. Théorèmes des fonctions imolicites.

-:-:-:-

Rappels sur les opérateurs non-linéaires - Théorème des fonctions implicites.

I. Applications différentiables.

1) Définition.

Soient E et F deux Banach, et f une application : $E \longrightarrow F$, définie pour $x \in U$ ouvert de E. On dit que f est Fréchet-différentiable en x_o ssi $\exists\, L \in \mathcal{L}(E;F)$ tel que

$$f(x_o+y) = f(x_o) + Ly + \emptyset(y)$$

où $\|\emptyset(y)\|_F \leq \|y\|_E\, \psi(y)$, $\psi(y)$ étant à valeurs réelles et tel que $\lim\limits_{y \to 0} \psi(y) = 0$.

On écrit $\emptyset(y) = o(\|y\|_E)$ et l'on note $L = Df(x_o)$, dérivée de f en x_o, et $L \in \mathcal{L}(E;F)$.

Remarque. Si L existe, il est unique (évident).

2) Cas des applications complètement continues.

Définition. On dit que $f : E \longrightarrow F$ est complètement continue ssi f est continue et compacte (l'image de tout ensemble borné est relativement compacte).

Remarque. Si $\{x_n\}$ est une suite bornée de E, alors $\exists$ une sous-suite $\{x_n^{(1)}\}$ telle que $\{f(x_n^{(1)})\}$ converge dans F.

Théorème. Soit $f : E \longrightarrow F$, Fréchet-différentiable en $x_o \in E$, et localement compacte en x_o ($\exists$ un voisinage U borné, de x_o, dont l'image est relativement compacte). Alors $L = Df(x_o)$ est un opérateur compact de E dans F.

Démonstration : Supposons que L ne soit pas compact et soit B un ensemble borné de E tel que $\overline{L\{B\}}$ ne soit pas compact. $\exists$ donc une suite $\{y_\alpha\} \subset L\{B\}$ et une boule B_ρ, de centre 0, de rayon ρ, dans F, tels que

$$y_\alpha - y_\beta \notin B_\rho \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta .$$

Soit $\{x_\alpha\} \subset E$ une suite telle que $Lx_\alpha = y_\alpha$, et $\forall\ \delta>0$, définissons :

$$\eta_\delta(x_n) = f(x_o+\delta x_n) - f(x_o) .$$

On a

(1) $\quad \eta_\delta(x_n) - \delta y_n = f(x_o+\delta x_n) - f(x_o) - \delta y_n = L(\delta x_n) - \delta y_n + \emptyset(\delta x_n)$
avec $\|\emptyset(\delta x_n)\|_F \leqslant \delta \|x_n\|_E \ \psi(\delta x_n)$,

et

(2) $\quad \eta_\delta(x_\alpha) - \eta_\delta(x_\beta) = \delta y_\alpha - \delta y_\beta + \emptyset(\delta x_\alpha) - \emptyset(\delta x_\beta)$.

Maintenant, $\exists$ une boule W de centre O dans E telle que

$$\emptyset\{\delta W\} \subset o(\delta)\ B_{\rho/3} ,$$

d'où, puisque B est borné, $\exists\ \lambda>0$ tel que $\lambda\ B \subset W$ et $\forall\ \alpha$

$$\emptyset(\delta x_\alpha) \in \emptyset(\delta \tfrac{W}{\lambda}) \subset o(\tfrac{\delta}{\lambda})\ B_{\rho/3} .$$

Pour δ assez petit $o(\frac{\delta}{\lambda})\ B_{\rho/3} \subset \delta\ B_{\rho/3}$, d'où, d'après (2)
$\eta_\delta(x_\alpha) - \eta_\delta(x_\beta) \notin \delta\ B_{\rho/3}$ (sinon $\delta y_\alpha - \delta y_\beta \in \delta B_\rho$ et il y a contradiction avec l'hypothèse). D'où, d'après la définition de η_δ on a

$$f(x_o+\delta x_\alpha) - f(x_o+\delta x_\beta) \notin \delta\ B_{\rho/3} \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta \quad \text{et} \quad \delta \quad \text{assez petit.}$$

Il y a alors contradiction avec la compacité locale en x_o de f. ■

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> $f : E \longrightarrow F$ <u>est complètement continue et Fréchet-différentiable en</u> $x_o \in E$, <u>alors</u> $L = Df(x_o)$ <u>est compact de</u> E <u>dans</u> F.

II. <u>Dérivées d'ordres supérieurs</u>.

1) <u>Applications multilinéaires continues</u>.

<u>Théorème</u>. <u>Soient</u> $E_1,\dots,E_n$, F, $n+1$ <u>espaces de Banach, et une application</u> u <u>multilinéaire de</u> $E_1 \times \dots \times E_n$ <u>dans</u> F. u <u>est continue ssi il existe un nombre</u> $K>0$ <u>tel que</u> $\forall\ (x_1,\dots,x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, <u>on ait</u>

$$\|u(x_1,\dots,x_n)\|_F \leq K\|x_1\|_{E_1}\cdots\|x_n\|_{E_n} .$$

Démonstration : Suffisance : L'inégalité entraîne trivialement la continuité en 0. Pour la continuité en un point quelconque, on utilise la multilinéarité pour estimer

$$\|u(x_1,\dots,x_n) - u(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)\|_F .$$

Nécessité : Soit u continue en 0. $\exists$ une boule B : $\sup\limits_{i=1,\dots,n} \|x_i\|_{E_i} \leq r$, dans $E_1\times\dots\times E_n$, telle que

$$(z_1,\dots,z_n)\in B \longrightarrow \|u(z_1,\dots,z_n)\|_F \leq 1 .$$

Soit alors $(x_1,\dots,x_n)$ et supposons que $\forall i$, $x_i \neq 0$, on a donc

$$z_i = r\frac{x_i}{\|x_i\|_{E_i}},\ i=1,\dots,n \Longrightarrow u(x_1,\dots,x_n) = u(z_1,\dots,z_n)\prod_{i=1}^{n}\frac{\|x_i\|_{E_i}}{r}$$

D'où : $\|u(x_1,\dots,x_n)\|_F \leq \frac{1}{r^n}\|x_1\|_{E_1}\cdots\|x_n\|_{E_n}$, et il suffit de choisir $K = 1/r^n$. Si $\exists\, i$ tel que $x_i = 0$, alors $u(x_1,\dots,x_n) = 0$ et l'inégalité est encore vérifiée. ∎

Remarque. On dit aussi que u est "bornée" et l'on définit sa "norme" $\|u\| = \sup\limits_{\substack{\|x_i\|_{E_i}\leq 1\\ i=1,\dots,n}} \|u(x_1,\dots,x_n)\|_F = \inf K$ satisfaisant l'inégalité.

Notation. On note $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires continues de $E_1\times\dots\times E_n$ dans F.

Théorème. $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ est un espace de Banach.

La démonstration est la même que pour $\mathscr{L}(E;F)$.

2) Identification de $\mathscr{L}[E_1;\mathscr{L}(E_2;F)]$ avec $\mathscr{L}(E_1,E_2;F)$.

Théorème. Pour tout $u\in\mathscr{L}(E_1,E_2;F)$ et tout $x\in E_1$, soit $u_x\in\mathscr{L}(E_2;F)$ $y \xrightarrow{u_x} u(x,y)$. Alors $\tilde{u} : x \longrightarrow u_x\in\mathscr{L}[E_1;\mathscr{L}(E_2;F)]$ et $u \longrightarrow \tilde{u}$ est un isomorphisme isométrique de $\mathscr{L}(E_1,E_2;F)$ sur $\mathscr{L}[E_1;\mathscr{L}(E_2;F)]$.

La démonstration est laissée au lecteur. Par récurrence sur n, il en résulte que $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ peut être identifié, avec conservation de la norme, à $\mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2;\ldots;\mathcal{L}(E_n;F))\ldots)$.

3) Dérivées d'ordres supérieurs.

Soit f Fréchet-différentiable dans $U \subset E$. Si $Df(x)$ est elle-même Fréchet-différentiable en x_o, on peut définir $D^2f(x_o)$ appelée dérivée seconde de f en x_o, et l'on a

$$D^2f(x_o) \in \mathcal{L}[E;\mathcal{L}(E;F)] ,$$

c'est-à-dire, d'après le 2), $D^2f(x_o) \in \mathcal{L}(E,E;F) = \mathcal{L}^2(E;F)$.

Par récurrence on définit une application p fois différentiable de U ouvert de E dans F et on note $D^pf(x_o)$ la dérivée $p^{\text{ième}}$ en x_o qui appartient à $\mathcal{L}^p(E;F)$.

Notation. f est de classe C^m : $\exists\ D^mf$ en tout point de U et $x \longrightarrow D^m f(x)$ est continue de U dans $\mathcal{L}^m(E;F)$.
On notera dorénavant $y^{(k)}$ les k-uples $(y,\ldots,y)$, de manière à ce que $D^k f(x)[y^{(k)}] \in F$.

Propriété. $D^mf(x_o)$ est symétrique par rapport à tous ses arguments (cf. [3] pour une démonstration ne faisant pas intervenir le Théorème de Hahn-Banach).

Démonstration : On remarque d'abord, grâce à l'identification précédente que la dérivée de l'application $x \longrightarrow Df(x)[y]$, où y est fixé dans E, est, en x_o : $D^2f(x_o)[\cdot,y] \in \mathcal{L}(E;F)$. Montrons que si f est de classe C^2 alors $D^2f(x_o)[x,y] = D^2f(x_o)[y,x]$.

$\forall g \in F^*$, notons

$$F(\xi,\eta) = (g,f(x_o+\xi x+\eta y))$$

alors
$$\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta}(0,0) = (g,D^2f(x_o)[y,x])$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\partial\xi}(0,0) = (g,D^2f(x_o)[x,y])$$

F étant continuement différentiable jusqu'à l'ordre 2, on a $\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial^2 F}{\partial\eta\partial\xi}$, d'où, d'après le théorème de Hahn-Banach :

$$D^2f(x_o)[y,x] = D^2f(x_o)[x,y] \text{ .}$$

On montrerait de la même manière que

$$D^mf(x_o)[x_1,x_2,\ldots,x_m] = D^mf(x_o)[x_{p(1)},x_{p(2)},\ldots,x_{p(m)}]$$

où p est une permutation quelconque des m premier entiers. ▮

4) Formule de Taylor.

Théorème. Soit $f \in C^m$ de $U \subset E$ dans F. Alors $\exists$ une fonction Q d'un voisinage V de 0 de E dans F, telle que

$$f(x_o+y) = f(x_o) + \frac{1}{1!} Df(x_o)[y] + \ldots + \frac{1}{m!} D^mf(x_o)[y^{(m)}] + Q(y) \text{ ,}$$

où $Q(y) = o(\|y\|^m)$, pour $y \in V$.

Démonstration : Soit $g \in F^*$, on considère alors la fonction scalaire définie sur $[0,1]$:

$$t \longrightarrow F(t) = (g,f(x_o+ty)) \text{ .}$$

On a, pour $k \leq m$, $F^{(k)}(t) = (g,D^kf(x_o+ty)[y^{(k)}])$. Puis, à l'aide de la formule classique :

$$F(t) = F(o) + \frac{t}{1!}F'(o)+\ldots+ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} F^{(m-1)}(o) + \frac{1}{(m-1)!} \int_o^t (t-s)^{m-1} F^{(m)}(s)ds,$$

On obtient, grâce au théorème de Hahn-Banach (Si $x \in F$ et $(g,x) = 0$, $\forall g \in F^*$, alors $x = 0$, car $\exists g \in F^*$ tel que $(g,x) = \|x\|_F$, $\|g\|_{F^*} = 1$) :

$$f(x_o+y) = f(x_o) + \frac{1}{1!}Df(x_o)[y] +\ldots+ \frac{1}{(m-1)!} D^{m-1}f(x_o)[y^{(m-1)}] +$$
$$+ \frac{1}{(m-1)!} \int_o^1 (1-t)^{m-1} D^mf(x_o+ty)[y^{(m)}] \, dt \text{ .}$$

Maintenant, il suffit de remarquer que

$$\int_o^1 (1-t)^{m-1} dt = \frac{1}{m}$$

et de prendre $Q(y) = \frac{1}{(m-1)!} \int_o^1 (1-t)^{m-1} [D^mf(x_o+ty)[y^{(m)}]-D^mf(x_o)[y^{(m)}]]dt$

pour avoir le résultat du théorème, grâce à la continuité de D^mf. ▮

5) Fonctions analytiques.

Définition. Soit $f \in C^\infty$ de $U \subset E$ dans F, on dira que f est "analytique" dans U, si pour tout $x \in U$, $\exists$ une boule B_ρ ouverte dans E, de centre x, de rayon $\rho(x) > 0$, telle que f puisse s'écrire sous la forme :

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x)[y^{(n)}] ,$$

où $f^{(n)}(x) \in \mathcal{L}^n(E;F)$, la série étant normalement convergente dans F pour $y \in B_\rho$.

Remarque. Il y a unicité des $f^{(n)}(x)$. En effet, considérons $g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x)[y^{(n)}] = 0$ et soit p le plus petit entier tel que $f^{(p)}(x) \neq 0$. Alors $h(t) = \dfrac{g(x,ty)}{t^p}$ est continue sur $]0,1]$ pour $\|y\|_E = \rho' < \rho$. Or $\lim_{t\to 0} h(t) = f^{(p)}(x)[y^{(p)}]$. D'autre part, par construction $h(t) = 0$ $\forall t \in]0,1]$ $\Longrightarrow$ il y a contradiction.

III. Théorème des foncitons implicites.

1) Dérivées partielles.

Soit $f \in C^1$ de $U \subset E$ dans F. On considère le cas où $E = E_1 \times E_2$. Pour $(a_1,a_2) \in U$, on a les applications partielles

$$x_1 \to f(x_1,a_2) \quad \text{et} \quad x_2 \to f(a_1,x_2)$$

d'ouverts de E_1 et E_2, respectivement, dans F. On définit, de même que pour les applications de $\mathbb{R}^n$, les dérivées partielles de f :

$$\begin{cases} D_1 f(a_1,a_2) \in \mathcal{L}(E_1;F) \\ D_2 f(a_1,a_2) \in \mathcal{L}(E_2;F) . \end{cases}$$

On montrerait, de manière analogue au cas $\mathbb{R}^n$, que

$$Df(x_1,x_2)[y_1,y_2] = D_1 f(x_1,x_2)[y_1] + D_2 f(x_1,x_2)[y_2] ,$$

et que pour que $f \in C^1$ il faut et il suffit que $D_1 f$ et $D_2 f$ soient continues.

2) Méthode des approximations successives.

On veut résoudre $y = \mathcal{F}(x,y)$ par rapport à y.

Théorème 1. Soient U et V, deux boules ouvertes de centre 0 et de rayons α et β respectivement dans E et F, et soit $\mathcal{F}$ une application continue de $U \times V$ dans F vérifiant :

$$\|\mathcal{F}(x,y_2) - \mathcal{F}(x,y_1)\|_F \leqslant k\|y_2 - y_1\|_F , \quad k<1 ,$$

pour $x \in U$, y_1 et $y_2 \in V$. Alors, si de plus

$$\|\mathcal{F}(x,0)\|_F < \beta(1-k) \quad \forall x \in U ,$$

$\exists$ une application unique f de U dans V telle que

$$f(x) = \mathcal{F}[x,f(x)] , \quad \forall x \in U$$

et f est continue dans U.

Démonstration : Posons $y_0 = 0$ et $y_n = \mathcal{F}(x,y_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$. Supposons que $y_p \in V$ pour $p=1,\ldots,n-1$. Pour $p \in [2,n]$, on a

$$\|y_p - y_{p-1}\|_F = \|\mathcal{F}(x,y_{p-1}) - \mathcal{F}(x,y_{p-2})\|_F \leqslant k\|y_{p-1} - y_{p-2}\|_F \leqslant k^{p-1}\|y_1\|_F .$$

Par suite

$$\|y_n\|_F \leqslant (k^{n-1} + \ldots + 1)\|y_1\|_F \leqslant \frac{\|y_1\|_F}{1-k} < \beta \implies y_n \in V .$$

De plus, par récurrence, $y_n(x) = \mathcal{F}[x,y_{n-1}(x)] = f_n(x)$ est continue de U dans V et $\|f_n(x) - f_{n-1}(x)\| < k^{n-1}\beta(1-k)$ pour $x \in U$. On a alors une suite de Cauchy dans l'espace de Banach des fonctions continues bornées de U dans F (muni de la norme de la convergence uniforme). Cette suite converge donc vers f continue bornée : $\|f(x)\|_F < \beta$. L'unicité est immédiate. ∎

3) Théorème des fonctions implicites (cf. [3]).

Théorème 2. Soient E, F, G trois Banach, $\mathcal{F}$ continuement différentiable de $U \subset E \times F$ dans G . Soit $(x_o, y_o) \in U$ tel que $\mathcal{F}(x_o, y_o) = 0$ et que $D_2\mathcal{F}(x_o, y_o)$ admette un inverse borné.

Alors, $\exists\, \mathcal{V}(x_o) \subset E$ tel que $\forall\, \mathcal{V}$ voisinage ouvert connexe de $x_o \subset \mathcal{V}(x_o)$, $\exists$ une application continue unique f de $\mathcal{V}$ dans F telle que $f(x_o) = y_o$, $(x, f(x)) \in U$ et $\mathcal{F}[x, f(x)] = 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}$. De plus, f est continuement différentiable dans $\mathcal{V}$ et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = - [D_2\mathcal{F}[x, f(x)]]^{-1} \circ [D_1\mathcal{F}[x, f(x)]]$$

Démonstration : Trois étapes :

1ère étape. Existence et unicité de f , de $\mathcal{V}(x_o)$ dans $\mathcal{V}'(y_o)$. Notons $T_o = D_2\mathcal{F}(x_o, y_o) \in \mathcal{L}(F; G)$. L'équation $\mathcal{F}(x, y) = 0$ s'écrit aussi

$$y = \mathcal{G}(x, y) \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}(x, y) \equiv y - T_o^{-1} \circ \mathcal{F}(x, y) .$$

On a $D_2\mathcal{G}(x_o, y_o) = 0$ par construction et l'on va appliquer le théorème 1 à la fonction $(x', y') \longrightarrow \mathcal{G}(x_o + x', y_o + y') - y_o$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \|T_o^{-1}\|_{\mathcal{L}(G; F)} \leq 1/2$, $\exists$ deux boules $\mathcal{V}(x_o)$, $\mathcal{V}'(y_o)$ de centres x_o , y_o et de rayons respectifs α, β, dans E et F , telles que $\forall\, x \in \mathcal{V}(x_o)$ et $y_1, y_2 \in \mathcal{V}'(y_o)$, on ait :

$$\|\mathcal{F}(x, y_2) - \mathcal{F}(x, y_1) - T_o(y_2 - y_1)\|_G \leq \varepsilon \|y_2 - y_1\|_F .$$

D'où

$$\|\mathcal{G}(x, y_2) - \mathcal{G}(x, y_1)\|_F \leq \|T_o^{-1}\|_{\mathcal{L}(G; F)} \cdot \|T_o(y_2 - y_1) - (\mathcal{F}(x, y_2) - \mathcal{F}(x, y_1))\|_G$$

$$\leq 1/2 \|y_2 - y_1\|_F .$$

D'autre part, $\mathcal{G}(x, y_o) - y_o = - T_o^{-1}\mathcal{F}(x, y_o)$. Or $\mathcal{F}(x_o, y_o) = 0$ et $\mathcal{F}$ est continue. D'où, pour α assez petit on a

$$\|\mathcal{G}(x, y_o) - y_o\| \leq \beta/2 \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{V}(x_o) .$$

On peut alors appliquer le théorème 1 : $\exists$ une application unique f de

$\mathcal{V}(x_o)$ dans $\mathcal{V}'(y_o)$ telle que $\mathcal{F}[x,f(x)] = 0 \ \forall x \in \mathcal{V}(x_o)$ et $f(x_o) = y_o$. De plus f est continue dans $\mathcal{V}(x_o)$.

<u>2ème étape</u>. Extension de l'unicité.

Soit maintenant $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}(x_o)$, un voisinage ouvert connexe de x_o, on va montrer que f est l'application continue unique de $\mathcal{V}$ dans F telle que $f(x_o) = y_o$, $(x,f(x)) \in U$ et $\mathcal{F}[x,f(x)] = 0$.

Soit g une deuxième application vérifiant ces conditions et considérons le sous-ensemble $M \subset \mathcal{V}(x_o)$ des x tels que $f(x) = g(x)$. $x_o \in M$ par définition et M est fermé car image réciproque par $f-g$ de $\{0\}$. Montrons que M est ouvert, il en résultera ainsi que $M = \mathcal{V}$ et le résultat voulu sera démontré.

Pour cela on utilise le fait que l'ensemble des opérateurs linéaires d'inverses bornés est ouvert dans $\mathcal{L}(F;G)$, d'où, pour $x \in \mathcal{V}(x_o)$, $D_2\mathcal{F}[x,f(x)]$ est d'inverse borné. Soit $a \in M$, on montrerait alors comme à la première étape qu'il existe $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'[f(a)] \subset F$ tels que $\forall\ x \in \mathcal{V}(a)$, $f(x)$ est la solution unique de $\mathcal{F}(x,y) = 0$ telle que $y \in \mathcal{V}'[f(a)]$. Mais comme g est continue en a et que $g(a) = f(a)$, $\exists\ \mathcal{V}_1(a) \subset \mathcal{V}(a)$ tel que $g(x) \in \mathcal{V}'[f(a)]$ pour $x \in \mathcal{V}_1(a)$. D'où, $g(x) = f(x)$ pour $x \in \mathcal{V}_1(a)$ et M est ouvert.

<u>3ème étape</u>. Différentiabilité de f.

Soient x et $x+h \in \mathcal{V}(x_o)$ et posons $u = f(x+h) - f(x)$, alors $\mathcal{F}(x+h, f(x)+u) = 0$ et $u \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$. Maintenant, d'après la différentiabilité de $\mathcal{F}$, on a $\forall\ \delta>0$, $\exists\ r>0$ tel que

$$\|\mathcal{F}[x+h,f(x)+u] - \mathcal{F}[x,f(x)] - D_1\mathcal{F}[x,f(x)\circ[h] - D_2\mathcal{F}(x,f(x)[u]\|_G$$

$$\leqslant \delta(\|h\|+\|u\|) \quad \text{pour} \quad \|h\| \leqslant r.$$

Comme $D_2\mathcal{F}[x,f(x)]$ est d'inverse borné, ceci peut encore s'écrire :

$$\|[D_2\mathcal{F}(x,f(x)]^{-1}\circ[D_1\mathcal{F}[x,f(x)]]\circ[h]+u\|_F \leqslant \delta\,\|[D_2\mathcal{F}(x,f(x)]^{-1}\|(\|h\|+\|u\|).$$

Or si on prend δ tel que $\delta\,\|(D_2\mathcal{F})^{-1}\| \leqslant 1/2$ et si on pose $a = 2\|(D_2\mathcal{F})^{-1}\circ D_1\mathcal{F}\|+1$, on arrive immédiatement à $\|u\|_F \leqslant a\|h\|_E$.

Par suite, revenant à la définition de u on arrive à

$$\| f(x+h)-f(x)+[D_2\mathcal{F}(x,f(x)]_o^{-1}[D_1\mathcal{F}(x,f(x)]\circ[h]\|_F \leqslant \delta(1+a)\|(D_2\mathcal{F})^{-1}\|\circ\|h\|_E ,$$

et ceci prouve la différentiabilité de f et l'expression de sa dérivée montre qu'elle est continue. ∎

4) Théorème des fonctions implicites dans le cas analytique.

Théorème 3. (cf. [4]). Si, outre les hypothèses du Théorème 2, $\mathcal{F}$ est analytique de $U \subset E \times F$ dans G, alors, la solution $y = f(x)$ de $\mathcal{F}(x,y) = 0$ est analytique dans un voisinage $\mathcal{V}(x_o)$.

Démonstration : On peut donc écrire pour $(x,y) \in B_\rho(x_o,y_o)$ (boule de rayon ρ dans $E \times F$),

(1) $$\mathcal{F}(x,y) = \sum_{p+q\geqslant 1} \mathcal{F}_{pq}[(x-x_o)^{(p)},(y-y_o)^{(q)}]$$

avec $\mathcal{F}_{pq} \in \mathcal{L}(\underbrace{E,\ldots,E}_{p\text{ fois}},\underbrace{F,\ldots,F}_{q\text{ fois}};G)$ et $\mathcal{F}_{o1}^{-1} \in \mathcal{L}(G;F)$.

On pose $x-x_o = h$ et $y-y_o = u$, on peut alors écrire $\mathcal{F}(x,y) = 0$ sous la forme :

(2) $$u = -\mathcal{F}_{o1}^{-1}\circ\{\mathcal{F}_{1o}[h] + \sum_{p+q\geqslant 2} \mathcal{F}_{pq}[h^{(p)},u^{(q)}]\} .$$

On cherche alors la solution (dont on connaît l'unicité), sous la forme :

(3) $$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n[h^{(n)}] \quad \text{(notations du II,5)}.$$

Cela donne, en identifiant (on utilise ici l'unicité du développement) :

$$u_1[h] = -\mathcal{F}_{o1}^{-1}\circ\mathcal{F}_{1o}[h]$$

$$u_2[h^{(2)}] = -\mathcal{F}_{o1}^{-1}\circ\{\mathcal{F}_{2o}[h^{(2)}]+\mathcal{F}_{11}[h,u_1[h]]+\mathcal{F}_{o2}[(u_1[h])^{(2)}]\}$$

....

$$u_n[h^{(n)}] = P_n(h,u_1,\ldots,u_{n-1})$$

ce qui permet de déterminer successivement les $u_n[h^{(n)}]$.

Il reste à montrer la convergence de (3).

Remarquons d'abord que si $\|h\|_E \leq \rho_1$ et $\|u\|_F \leq \rho_2$ avec $\rho_1 + \rho_2 < \rho$, alors $\|\mathcal{F}_{pq}[h^{(p)},u^{(q)}]\|_G \xrightarrow[p+q\to\infty]{} 0$ uniformément par rapport à h et u.

En effet, d'après la définition de l'analyticité et le fait que l'on a

$$\sum_{p+q=n} \mathcal{F}_{pq}[h^{(p)},u^{(q)}] \equiv \mathcal{F}^{(n)}[z^{(n)}]$$ où $z = (h,u)$, alors si

$\|u\|_F + \|h\|_E \leq \rho' < \rho$, $\exists$ K>0 tel que

$$\|\sum_{p+q=n} \mathcal{F}_{pq}[h^{(p)},u^{(q)}]\|_G \leq K\left[\frac{\|u\|+\|h\|}{\rho'}\right]^n .$$

Supposons maintenant que $\|h\| = \rho_1$, $\|u\| = \rho_2$ et que $\rho_1 + \rho_2 = \rho'' < \rho'$, alors $\|\sum_{p+q=n} \lambda^p \mu^q \mathcal{F}_{pq}[h^{(p)},u^{(q)}]\|_G \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour $\lambda,\mu \in [0,1]$.

Faisons $\mu = 0 \Longrightarrow \|\mathcal{F}_{no}[h^{(n)}]\|_G \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. De même, on arrive à $\|\mathcal{F}_{on}[u^{(n)}]\|_G \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On a donc maintenant :

$$\|\sum_{\substack{p+q=n \\ p \text{ et } q\geq 1}} \lambda^{p-1}\mu^{q-1}\mathcal{F}_{pq}[h^{(p)},u^{(q)}]\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

En opérant de même que précédemment, on arrive à

$$\|\mathcal{F}_{n-1,1}[h^{(n-1)},u]\|_G \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \|\mathcal{F}_{1,n-1}[h,u^{(n-1)}]\|_G \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Itérant le processus, on obtient la propriété cherchée.

Finalement, on peut donc garantir l'existence de M>0 tel que

$$\|\mathcal{F}_{o1}^{-1}\circ\mathcal{F}_{pq}[h^{(p)},u^{(q)}]\|_F \leq M \quad \text{si} \quad \|h\|_E \leq \rho_1 \quad \text{et} \quad \|u\|_F \leq \rho_2 .$$

Nous sommes alors prêts à construire une série majorante pour(3). Pour cela écrivons $\|h\|_E = \xi$ et $\|u_n[h^{(n)}]\|_F = \beta_n\xi^n$. Nous obtenons :

$$\beta_1\xi \leq M\frac{\xi}{\rho_1}$$

$$\beta_2\xi^2 \leq M\left[\left(\frac{\xi}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{\rho_1}\right)\left(\frac{\beta_1\xi}{\rho_2}\right) + \left(\frac{\beta_1\xi}{\rho_2}\right)^2\right]$$

$\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$

$$\beta_n\xi^n \leq MQ_n\left[\frac{\xi}{\rho_1}, \frac{\beta_1\xi}{\rho_2}, \ldots, \frac{\beta_{n-1}\xi^{n-1}}{\rho_2}\right]$$, polynôme homogène de d°n en ξ.

Remplaçons les inégalités par des égalités en notant γ_i au lieu de β_i et $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \xi^i$, nous obtenons une série majorante dont chaque terme est déterminé à partir des précédents. Il est alors immédiat de voir que η satisfait formellement l'équation :

$$(4) \qquad \eta = M\left[\frac{\xi}{\rho_1} + \sum_{p+q\geq 2} \left(\frac{\xi}{\rho_1}\right)^p \left(\frac{\eta}{\rho_2}\right)^q\right] .$$

Mais, dès que $\xi < \rho_1$ et $\eta < \rho_2$, l'équation (4) peut encore s'écrire :

$$(5) \qquad \eta = \frac{M}{(1-\frac{\xi}{\rho_1})(1-\frac{\eta}{\rho_2})} - M - M\frac{\eta}{\rho_2} .$$

L'équation (5) doit fournir une solution $\eta = \eta(\xi)$ telle que $\eta(0) = 0$. Pour cela, on vérifie qu'il est nécessaire que :

$$\xi \leqslant \alpha , \quad \text{avec} \quad \alpha = \rho_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_2+2M}\right)^2 ,$$

et qu'alors :

$$\eta = \frac{\rho_2^2}{2(\rho_2+M)} \left\{1 - \left(1-\frac{\xi}{\alpha}\right)^{1/2} \left(1-\frac{\xi}{\rho_1}\right)^{-1/2}\right\} .$$

Le développement en série entière de $\eta(\xi)$ garantit la convergence pour $0 \leqslant \xi < \alpha \leqslant \rho_1$. Finalement, si l'on prend $\|x-x_o\|_E < \alpha(\rho_1, \rho_2)$ on est assuré de la convergence en norme de la série :

$$y = y_o + \sum_{n=1}^{\infty} u_n[(x-x_o)^{(n)}] . \qquad \blacksquare$$

Remarque. On peut rechercher le α optimum, puisque $\rho_2 + \rho_1 < \rho$ est la seule contrainte. Si on admet que $M = M(\rho')$ où $\rho' < \rho$, alors si $\rho_1 + \rho_2 = \rho'$, le meilleur choix est donné par $\rho_1 = \rho' - 3M\{(1+\frac{4\rho'}{9M})^{1/2} - 1\}$ qui est, ainsi que α de l'ordre de $1/3\ \rho'$ quand ρ'/M est petit devant 1 .

IV. Théorème de Brouwer (théorème du point fixe).

Théorème. Soit $\emptyset$ une application continue de $S = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| \leqslant 1\}$ dans lui-même, alors $\exists\, y$ tel que $\emptyset(y) = y$.

Remarque. Le théorème est encore vrai si on prend un domaine Σ homéomorphe à S, à la place de celui-ci (si $y = \psi(x)$ et $\Sigma = \psi(S)$ $\longrightarrow$ $x = \psi^{-1} \circ \emptyset \circ \psi(x)$).

Démonstration : 1ère étape. Supposons que l'on ait montré le théorème pour tout $\emptyset \in C^\infty$ de S dans S. Alors, d'après le théorème d'approximation de Weierstrass, $\exists \{\emptyset_k\} \subset C^\infty$ de S dans S, convergeant uniformément vers $\emptyset$ dans C^0 de S dans S. $\forall k$, $\exists\, y_k \in S$ tel que $\emptyset_k(y_k) = y_k$. Puisque S est compact (dimension n), $\exists$ une sous-suite $\{y_{k_1}\}$ convergeant vers un point $y \in S$. Mais,
$\lim_{k_1 \to \infty} \emptyset_{k_1}(x) = \emptyset(x)$ uniformément sur S, d'où

$$\emptyset(y) = \lim_{k_1 \to \infty} \emptyset_{k_1}(y) = \lim_{k_1 \to \infty} \emptyset_{k_1}(y_{k_1}) = \lim_{k_1 \to \infty} y_{k_1} = y .$$

Ceci montre qu'il est suffisant de considérer $\emptyset \in C^\infty$ de S dans S.

2ème étape. On suppose $\emptyset \in C^\infty$ de S dans S et on suppose que $\emptyset(x) \neq x$, $\forall x \in S$. On considère alors une fonction $f \in C^\infty$ de $(n+1)$ variables, de la forme : $f(t;x) = x + t\, a(x)[x-\emptyset(x)]$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in S$, où $x \longrightarrow a(x) \in C^\infty(S)$ est telle que $a(x) = 0$ pour $\|x\| = 1$ et $\|x + a(x)[x-\emptyset(x)]\| = 1$. On peut expliciter $a(x)$, sous la forme

$$\|x - \emptyset(x)\|^2 a = (x, \emptyset(x)-x) + \{(x, x-\emptyset(x))^2 + (1-\|x\|^2)\|x-\emptyset(x)\|^2\}^{1/2} ,$$

c'est-à-dire la plus grande racine de l'équation $\|x + a[x-\emptyset(x)]\|^2 = 1$. Par hypothèse, comme $\|x-\emptyset(x)\| \neq 0$, le discriminant est >0 quand $\|x\| \neq 1$. De même, si $\|x\| = 1$, alors $(x, x-\emptyset(x)) \neq 0$ sinon $(x, \emptyset(x)) = 1$ entrainerait $\emptyset(x) = x$. Le discriminant n'étant jamais nul pour $x \in S$, il en résulte que $x \longrightarrow a(x) \in C^\infty(S)$.

Notons maintenant $D_0(t;x)$ le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(t;x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(t;x)$, et considérons l'intégrale

(1) $$I(t) = \int_S D_0(t;x)\, dx_1, \ldots, dx_n .$$

$I(0) = \mathrm{vol}(S)$ car $D_0(0;x) = 1$ puisque $f(0;x) = x$.

$I(1) = 0$ car $D_0(1;x) = 0$ puisque $\|f(1;x)\| = 1$ donne une relation de dépendance entre les vecteurs-colonnes de $D_o(1;x)$. On va montrer qu'en fait $I'(t) = 0$, ce qui donnera la contradiction recherchée.

Si l'on note $D_i(t;x)$ le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial t}(t;x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(t;x)$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}(t;x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}(t;x)$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}(t;x)$ alors on a

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial}{\partial t} D_o(t;x) = -\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(t;x) .$$

En effet, posons $C_{ij} = C_{ji}$ = déterminant dont la première colonne est $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$; les autres étant $\frac{\partial f}{\partial t}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont omis de l'énumération. En notant $t = x_o$, i pouvant varier de 0 à n maintenant on obtient :

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \sum_{j<i} (-1)^j C_{ij} + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} C_{ij} .$$

D'où

$$(-1)^i \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \sum_{j=o}^{n} (-1)^{i+j} C_{ij}\, \sigma(i,j) \quad \text{où} \quad \sigma(i,j) \begin{cases} = 1 & \text{si } j<i \\ = 0 & \text{si } j=i \\ =-1 & \text{si } j>i \end{cases}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \sum_{i=o}^{n} (-1)^i \frac{\partial D_i}{\partial x_i} &= \sum_{i,j=o}^{n} (-1)^{i+j} C_{ij}\, \sigma(i,j) \\ &= \sum_{i,j=o}^{n} (-1)^{i+j} C_{ji}\, \sigma(j,i) = -\sum_{i,j=o}^{n} (-1)^{i+j} C_{ij}\, \sigma(i,j) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \sum_{i=o}^{n} (-1)^i \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0$ et (2) est démontré.

Il résulte de (2), après dérivation sous le signe $\int$ de (1), que

$I'(t)$ est une somme d'intégrales du type :

$$\text{(3)} \qquad (-1)^{i+1} \int_S \frac{\partial D_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n .$$

Soit S_i la sphère unité dans l'espace de variables $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$, et soit $x_i^+ = [1-(x_1^2+\ldots+x_{i-1}^2+x_{i+1}^2+\ldots+x_n^2)]^{1/2}$ et $x_i^- = -x_i^+$. Soit encore $p_i^{\pm} = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^{\pm},x_{i+1},\ldots,x_n)$, alors (3) se décompose en deux intégrales

$$(4) \qquad (-1)^{i+1}\int_{S_i}[D_i(t;p_i^+)-D_i(t;p_i^-)]\,dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n .$$

Mais, $\|p_i^{\pm}\| = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(t;x) = 0$ pour $\|x\| = 1 \Longrightarrow D_i(t;p_i^{\pm}) = 0$, et $I'(t) = 0$. Il y a donc contradiction, et cela montre que l'hypothèse initiale $\emptyset(x) \neq x \quad \forall x \in S$ est erronée. ∎

Notons pour mémoire, la généralisation du théorème de Brouwer dans un Banach :

Théorème de Schauder. Si S est un convexe fermé borné de E et $\emptyset$ une application complètement continue de S dans S, alors $\exists\ x \in S$ tel que

$$x = \emptyset(x) .$$

Remarque. Ce théorème résulte du théorème plus général de Schauder-Tychonoff (cf. référence [1]) :

Un sous-ensemble compact convexe C d'un espace vectoriel topologique localement convexe a la propriété du point fixe : c'est-à-dire que toute application continue de C dans C a un point fixe.

En effet, $\overline{\Phi(S)}$ est un compact $\subset S$ et l'enveloppe convexe étant notée co(.), on a : $\overline{co[\overline{\Phi(S)}]}$ qui est un compact convexe $\subset S$. D'où,

$$\Phi\,[\overline{co[\overline{\Phi(S)}]}] \subset \Phi(S) \subset \overline{co[\overline{\Phi(S)}]} ,$$

et, puisque le Banach E est localement convexe, Φ admet un point fixe dans $\overline{co[\overline{\Phi(S)}]}$.

Bibliographie.

[1] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ, Linear operators, tome I, Interscience, New-York, 1964.

[2] J.T. SCHWARTZ , Nonlinear functional analysis, Gordon and Breach, New-York, 1969.

[3] J. DIEUDONNE , Eléments d'Analyse, tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[4] M. M. VAINBERG et V.A. TRENOGIN , Méthodes de Liapounov et Schmidt dans la théorie des équations non-linéaires, Uspeki Mat. Nauk, Vol.17, n°2 (104), 1962, p.13-75 (en russe).

-:-:-:-

VII - Problèmes d'évolution faiblement non-linéaires
Opérateurs indépendants de t

-:-:-:-

Problèmes d'évolution faiblement non-linéaires
Opérateurs indépendants de t

I. Espace K .

Soit L un opérateur linéaire fermé, de domaine dense $\mathcal{D}$, dans l'Hilbert H , vérifiant les conditions du §.V du chapitre 4, c'est-à-dire que $t \longrightarrow e^{-Lt}$ est un semi-groupe analytique dans H . On suppose alors, qu'il existe un Hilbert K tel que les injections canoniques $\mathcal{D} \hookrightarrow K \hookrightarrow H$ soient continues, où $\mathcal{D}$ est muni de la structure hilbertienne définie par le produit scalaire :

$$(u,v)_{\mathcal{D}} = (u,v)_H + (Lu,Lv)_H \ .$$

On sait que pour $t>0$, $\exp(-Lt) \in \mathcal{L}(K;\mathcal{D})$ puisque c'est la composition de l'injection continue $K \longrightarrow H$ et de $e^{-Lt} \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D})$. Nous faisons alors l'hypothèse essentielle suivante :

$$(1) \qquad \exists\, c>0 \ , \quad \|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leqslant \frac{c}{t^{\alpha}} \ , \ \alpha \in [0,1[\ , \ t \in]0,T] \ .$$

Cela implique nécessairement que l'inclusion $H \hookrightarrow K$ soit stricte si les espaces sont de dimension infinie (cf. chapitre 4).

Exemple.

$H \equiv L^2(0,1)$, $\mathcal{D} \equiv H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$ (notations classiques des espaces de Sobolev),

$$L \ : \ \forall\, u \in \mathcal{D} \ , \ Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in H \ .$$

On montre que $\mathcal{D}$ est dense dans H , l'injection étant compacte. D'autre part, L est autoadjoint, strictement positif. Il en résulte que $t \longrightarrow e^{-Lt}$ est un semi-groupe analytique dans H . On montrerait de plus que si l'on prend $K = H^1_0(0,1)$, alors l'inégalité (1) a lieu avec $\alpha = 1/2$ (interpolation entre espaces). Enfin, on montrerait que si $K = H^1(0,1)$, alors l'inégalité (1) a lieu avec $\alpha = 3/4$ (démonstration faite à l'annexe 2).

Lemme 1.* Une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait (1) est qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ et une constante $k_\varepsilon > 0$, telles

* cf. à l'annexe 2 un lemme équivalent (D. et H. Brézis) qu'on utilise ensuite pour démontrer les estimations pour l'exemple ci-dessus.

que :

$$(2) \qquad \|(L+\zeta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq \frac{k_\varepsilon}{|\zeta-\gamma|^{1-\alpha}}, \text{ pour } \begin{cases} |\arg(\zeta-\gamma)| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon, \\ |\zeta-\gamma| > \varepsilon. \end{cases}$$

Démonstration : $-L$ étant un générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe dans le secteur $|\arg t| < \omega$, $\exists\ \gamma\in\mathbb{R}$ et $M_\varepsilon > 0$ tels que

$$\|(L+\zeta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{M_\varepsilon}{|\zeta-\gamma|} \text{ pour } |\arg(\zeta-\gamma)| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon .$$

D'autre part, on a vu que :

$$(L+\zeta)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\zeta t}\, e^{-Lt}\, dt \text{ pour } \mathcal{R}e\ \zeta>\gamma ;$$

prenons alors $\zeta\in\mathbb{R}$, $\zeta>\gamma$, on a

$$\|(L+\zeta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq \frac{M'}{(\zeta-\gamma)^{1-\alpha}} \left(1+\frac{1}{(\zeta-\gamma)^\alpha}\right),$$

car $\|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq M'(1+t^{-\alpha})e^{\gamma t}$ pour $t>0$ ($\exists\ M'$!).

On a maintenant l'identité :

$$(L+\zeta)^{-1} = (L+\zeta')^{-1} - (\zeta-\zeta')(L+\zeta)^{-1}(L+\zeta')^{-1}$$

où $|\arg(\zeta-\gamma)| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon$, $|\zeta-\gamma| = \zeta'-\gamma$, et où on remarque que $(L+\zeta)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{D})$ avec la même norme que dans $\mathcal{L}(H)$ (évident). On arrive à

$$\|(L+\zeta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq \|(L+\zeta')^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})}\cdot\left[1+|\zeta-\zeta'|\cdot\|(L+\zeta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}\right]$$

$$\leq \frac{M'}{(\zeta'-\gamma)^{1-\alpha}}\cdot\left[1+\frac{1}{(\zeta'-\gamma)^\alpha}\right]\cdot\left[1+2M_\varepsilon\right],$$

et l'on a bien montré l'inégalité (2) cherchée.

Réciproquement, si on a l'inégalité (2), alors on utilise

$$e^{-Lt} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\zeta t}(L+\zeta)^{-1}\, d\zeta ,$$

où Γ est une courbe identique à celle que l'on a définie au §.V,1) du chapitre 4, mais translatée de $+\gamma$. On a alors pour $t>0$

$$\|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma e^{(\mathrm{Re}\ \zeta)t}\cdot\frac{k_\varepsilon}{|\zeta-\gamma|^{1-\alpha}}\ |d\zeta|$$

et l'on arrive immédiatement à

$$(3) \qquad \|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq C(1+t^{-\alpha})e^{\gamma t} ,$$

où C est une constante positive. On en déduit immédiatement la formule (1) pour $t \in]0,T]$. ▨

Remarque. On montrerait de la même manière, que

$$\exists\ C_1 > 0 , \quad \|L\ e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq \frac{C_1}{t^{1+\alpha}} , \quad t \in]0,T] ,$$

d'où

$$\|L^2\ e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(K;H)} \leq \frac{C_1}{t^{1+\alpha}} , \quad t \in]0,T] .$$

Il vient alors, pour $s<t$, $s,t \in]0,T]$:

$$\|Le^{-Lt} - Le^{-Ls}\|_{\mathcal{L}(K;H)} = \left\|L \int_s^t \frac{de^{-L\tau}}{d\tau}\, d\tau\right\| = \left\|\int_s^t L^2\ e^{-L\tau}\, d\tau\right\|$$
$$\leq \int_s^t \frac{C_1}{\tau^{1+\alpha}}\, d\tau = \frac{C_1}{\alpha} \cdot \frac{t^\alpha - s^\alpha}{(ts)^\alpha} .$$

D'où

$$\|e^{-Lt} - e^{-Ls}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq C_2\left[\frac{t^\alpha - s^\alpha}{(ts)^\alpha} + (t-s)^{1-\alpha}\right] \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0 \quad s,t \in]0,T] ,$$

et $$\|e^{-Lt} - e^{-Ls}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq C_2\left[(\operatorname{Log} t - \operatorname{Log} s) + (t-s)\right] \quad \text{si} \quad \alpha = 0 \quad s,t \in]0,T].$$

II. Equation différentielle linéaire avec second membre.

Il s'agit dans ce paragraphe de résoudre le problème

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Lu = f(t) , & u \in C^0(0,T;\mathcal{D}) \cap C^1(0,T;H) \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{D} , & \end{cases}$$

où $f \in C^0(0,T;K)$. On rappelle que $C^m(0,T;\mathfrak{H})$ est l'espace de Banach des fonctions de $[0,T]$ dans l'Hilbert $\mathfrak{H}$ (T peut être infini), continues et bornées ainsi que leurs m premières dérivées, muni de la norme :

$$|||u|||^{(m)}_{\mathfrak{H}_T} = \sum_{k=0}^{m} \sup_{t \in (0,T)} \|u^{(k)}(t)\|_{\mathfrak{H}} .$$

<u>Lemme 2</u>. <u>Le problème</u> (1) <u>admet la solution unique</u> :

(2) $$u(t) = e^{-Lt}u_o + \int_o^t e^{-L(t-\tau)}f(\tau)\, d\tau \ , \quad T \text{ borné.}$$

<u>Démonstration</u> : a) Unicité de la solution de (1). Soient u_1 et u_2 deux solutions de (1), alors $v = u_1 - u_2$ vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Lv = 0 \ , & v \in C^o(0,T;\mathcal{D}) \cap C^1(0,T;H) \\ v(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Or, on sait, d'après le chapitre 4, que l'on doit avoir $v=0$.

b) Vérification que 2) est solution de (1).

La fonction $t \longrightarrow e^{-Lt}u_o \in C^o(0,t;\mathcal{D}) \cap C^1(0,T;H)$, car $u_o \in \mathcal{D}$ et $\frac{d}{dt}(e^{-Lt}u_o) = -e^{-Lt}\, Lu_o \in C^o(0,T;H)$. De plus $e^{-Lt}u_o \underset{t \to o}{\longrightarrow} u_o$ dans $\mathcal{D}$.

Notons maintenant $v(t) = \int_o^t e^{-L(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$. Alors $v(t) \in \mathcal{D}$ et $v(t) \underset{t \to o}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathcal{D}$, puisque

$$\| e^{-L(t-\tau)}f(\tau) \|_{\mathcal{D}} \leqslant \frac{C}{|t-\tau|^\alpha} |||f|||_{K_T} \ , \quad \alpha<1 \ .$$

De plus, si $h>0$

$$v(t+h) - v(t) = \int_o^t [e^{-L(t+h-\tau)} - e^{-L(t-\tau)}]\, f(\tau)\, d\tau + \int_t^{t+h} e^{-L(t+h-\tau)}f(\tau)\, d\tau$$

or $$\| \int_t^{t+h} e^{-L(t+h-\tau)}f(\tau)\, d\tau \|_{\mathcal{D}} \leqslant \int_t^{t+h} \frac{C}{|t+h-\tau|^\alpha} |||f|||_{K_T}\, d\tau = \frac{C}{1-\alpha} h^{1-\alpha} |||f|||_{K_T}$$

et si $\alpha \neq 0$

$$\| \int_o^t (e^{-L(t+h-\tau)} - e^{-L(t-\tau)})f(\tau)\, d\tau \|_{\mathcal{D}} \leqslant C_2 |||f|||_{K_T} \int_o^t [\frac{1}{(t-\tau)^\alpha} - \frac{1}{(t-\tau+h)^\alpha} + h^{1-\alpha}] d\tau$$

$$= C_2 |||f|||_{K_T} \{T\, h^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}(h^{1-\alpha} + t^{1-\alpha} - (t+h)^{1-\alpha})\}$$

(si $\alpha=0$, le calcul est semblable). Il en résulte que

$\| v(t+h) - v(t) \|_{\mathcal{D}}$ est au plus de l'ordre de $h^{1-\alpha}$, d'où $v \in C^o(0,T;\mathcal{D})$ et, de la même manière on a $Lv \in C^o(0,T;H)$.

Enfin,

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{1}{h}(e^{-Lh} - \mathbb{I}) \int_o^t e^{-L(t-\tau)}f(\tau)\, d\tau + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-L(t+h-\tau)} f(\tau)\, d\tau,$$

d'où $\lim\limits_{h\to o^+} \dfrac{v(t+h) - v(t)}{h} = - Lv(t) + f(t)$ (dans H), et $t \longrightarrow v(t)$ admet une dérivée à droite $D^+v(t) \in C^o(0,T;H)$.

Or $v(t) = \displaystyle\int_o^t D^+v(\tau)\, d\tau$ (par un raisonnement classique *), ce qui entraîne $\dfrac{dv}{dt} = D^+v(t)$ et v est dans $C^1(0,T;H)$.

La vérification de l'équation (1) devient alors immédiate. ▮

<u>Lemme 3. Soit</u> $\sigma(L)$ <u>le spectre de</u> L, <u>si</u> $\forall\, \zeta \in \sigma(L)$, $\mathcal{R}e\, \zeta \geqslant \xi > 0$, <u>alors le problème (1) admet la solution unique (2) dans</u> $C^o(0,\infty;\mathcal{D}) \cap C^1(0,\infty;H)$, <u>pourvu que</u> $f \in C^o(0,\infty;K)$.

<u>Démonstration</u> : En déformant le contour d'intégration Γ dans l'expression du semi-groupe holomorphe, de manière à ce que sa partie la plus à droite soit un segment d'abscisse $-\tilde{\xi}<0$, on arrive aux estimations :

$$(3) \qquad \|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(H)} = \|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D})} \leqslant k_o e^{-\tilde{\xi}t}, \quad t\geqslant 0,$$

$$(4) \qquad \|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leqslant k_1\left(1 + \frac{1}{t^\alpha}\right) e^{-\tilde{\xi}t}, \quad t>0.$$

La vérification du fait que $u(t)$, exprimé par la formule (2), soit dans $C^o(0,\infty;\mathcal{D}) \cap C^1(0,\infty;H)$ est alors immédiate. ▮

III. <u>Problème d'évolution non-linéaire</u>.

1) <u>Définition du problème</u>.

Il s'agit dans ce paragraphe de résoudre le problème :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Lu - M(u) = 0, & u \in C^o(0,T;\mathcal{D}) \cap C^1(0,T;H). \\ u(0) = u_o \in \mathcal{D}, \end{cases}$$

où $M : \mathcal{D} \longrightarrow K$ est analytique au sens du chapitre 6, et tel que

---

* Notons $w(t) = \int_o^t D^+ v(\tau)\, d\tau$. Alors $\dfrac{dw}{dt}$ existe et est continue, de plus $D^+(w-v) = 0$, $t \in [0,T]$; d'où, si l'on fait le même raisonnement qu'au §.II,3) du chapitre 4, on a $w(t) - v(t) = \text{cte} = 0$.

$$\|M(u)\|_K \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{D}}^2 \quad \text{si} \quad \|u\|_{\mathcal{D}} \leq \delta_o .$$

D'autre part, on impose à M de transformer tout borné de $\mathcal{D}$, en un borné de K.

Exemple. Reprenons l'exemple du §.1 et choisissons le terme non-linéaire $M(u) \equiv f(x,u,\frac{\partial u}{\partial x})$, où f est continûment différentiable par rapport à ses trois variables et, de plus, analytique par rapport aux deux dernières variables, le développement au voisinage de 0 commençant par des termes quadratiques. Pour $u \in \mathcal{D}$, on sait que u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont continus et bornés sur $[0,1]$, on aura donc bien* une estimation du type :

$$\|f(x,u,\frac{\partial u}{\partial x})\|_{H^1(0,1)} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{D}}^2 \quad \text{si} \quad \|u\|_{\mathcal{D}} \text{ est assez petit,}$$

et l'on peut envisager de résoudre le problème d'évolution

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \quad (\text{par exemple } f(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}) = (\frac{\partial u}{\partial x})^2) \\ u|_{t=o} = u_o \in H^2(0,1) \cap H^1_o(0,1) \\ u|_{x=o} = u|_{x=1} = 0 \ , \ u \in C^o(0,T;\mathcal{D}) \cap C^1(0,T;H) . \end{cases}$$

2) Existence de la solution. Propriétés générales.

Lemme 4. Le problème (1) est équivalent au problème

(2) $$u(t) = e^{-Lt}u_o + \int_o^t e^{-L(t-\tau)} M[u(\tau)]\, d\tau \quad , \quad u \in C^o(0,T;\mathcal{D}) ,$$

où $u_o \in \mathcal{D}$.

Démonstration : En effet, si u est solution de (1), alors $M(u) \in C^o(0,T;K)$ et d'après le Lemme 2, on a bien (2).

Réciproquement : (2) $\Longrightarrow M(u) \in C^o(0,T;K)$, d'où l'intégrale du second membre $\in C^o(0,T;\mathcal{D}) \cap C^1(0,T;H)$ comme on l'a vu au §.II. D'autre part $t \to e^{-Lt}u_o \in C^o(0,T;\mathcal{D}) \cap C^1(0,T;H)$, et $u(t) \xrightarrow[t\to o^+]{} u_o$ dans $\mathcal{D}$. Le fait que $u(t)$ vérifie l'équation (1) se déduit du Lemme 2.

Théorème 1. Existence et unicité de la solution de (1).
$\forall\, u_o \in \mathcal{D}$, il existe une solution de (1) pour tout $T < T_m(u_o)$. De plus,

* grâce à l'existence de $c>0$ tel que $\sup_{x\in(o,1)} (|u(x)|,|\frac{du}{dx}(x)|) \leq c\|u\|_{\mathcal{D}}$.

<u>cette solution est unique et dépend analytiquement de</u> u_0. <u>Enfin, si</u> $T_m < +\infty$, $\limsup_{T \to T_m} |||u|||_{\mathcal{D}_T} = +\infty$.

<u>Démonstration</u> : <u>1ère étape</u> : Existence de la solution.

Posons $\|u_0\|_{\mathcal{D}} = R_0/2$ et soit B_{R_0} la boule fermée de centre 0 de rayon R_0 de l'espace $\mathcal{D}$. Alors, on sait que $\exists\, M_{R_0}$

$$u \in B_{R_0}, \quad \|M(u)\|_K \leqslant M_{R_0},$$

$$u_1, u_2 \in B_{R_0}, \quad \|M(u_2) - M(u_1)\|_K \leqslant M_{R_0} \|u_2 - u_1\|_{\mathcal{D}}.$$

Soit alors

$$\mathcal{B}_t(u) = \int_0^t e^{-L(t-\tau)}\, M[u(\tau)]\, d\tau,$$

si on note

$$I(t) = \int_0^t k(1+\tau^{-\alpha})\, e^{\gamma\tau}\, d\tau,$$

on obtient $\forall\, u_1, u_2 \in C^0(0,T;B_{R_0})$:

$$\|\mathcal{B}_t(u_2) - \mathcal{B}_t(u_1)\|_{\mathcal{D}} \leqslant I(t)\, M_{R_0}\, |||u_2 - u_1|||_{\mathcal{D}_T}.$$

Soit alors T_0 tel que $\sup_{t \in [0,T_0]} \|e^{-Lt} u_0\|_{\mathcal{D}} = R_0 [1 - M_{R_0} \cdot I(T_0)]$,

T_0 existe puisque le premier membre est non décroissant, le second strictement décroissant et que l'on admet la valeur éventuelle $T_0 = \infty$. Alors, d'après le théorème du point fixe du chapitre 6, il existe une solution unique de (2), $u \in C^0(0,T_0;B_{R_0})$.

Reprenons maintenant le problème avec $u_1 = u(T_0)$ et $R_1 = 2\|u_1\|_{\mathcal{D}}$. On assure alors l'existence de $u \in C^0(0,T_1;B_{R_1})$ se raccordant avec le précédent. On itère le processus, jusqu'à l'obtention d'une solution de (2), sur un intervalle maximal $[0,T_m[$, telle que si $T < T_m$, la solution soit bornée dans $\mathcal{D}$. Remarquons que si l'un des T_i itérés précédemment est infini, alors la solution est dans $C^0(0,\infty;B_{\sup R_i})$; d'autre part si $T_m < +\infty$ alors $\limsup_{T \to T_m} |||u|||_{\mathcal{D}_T} = \infty$, sinon il serait possible de construire une solution sur un intervalle contenant $[0,T_m]$.

$$\|M(u)\|_K \leqslant \gamma \|u\|_{\mathcal{D}}^2 \quad \text{si} \quad \|u\|_{\mathcal{D}} \leqslant \delta_o .$$

D'autre part, on impose à M de transformer tout borné de $\mathcal{D}$, en un borné de K.

Exemple. Reprenons l'exemple du §.1 et choisissons le terme non-linéaire $M(u) \equiv f(x,u,\frac{\partial u}{\partial x})$, où f est continûment différentiable par rapport à ses trois variables et, de plus, analytique par rapport aux deux dernières variables, le développement au voisinage de 0 commençant par des termes quadratiques. Pour $u \in \mathcal{D}$, on sait que u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont continus et bornés sur $[0,1]$, on aura donc bien* une estimation du type :

$$\|f(x,u,\frac{\partial u}{\partial x})\|_{H^1(0,1)} \leqslant \gamma \|u\|_{\mathcal{D}}^2 \quad \text{si} \quad \|u\|_{\mathcal{D}} \text{ est assez petit,}$$

et l'on peut envisager de résoudre le problème d'évolution :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \quad (\text{par exemple } f(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}) = (\frac{\partial u}{\partial x})^2) \\ u_{|t=o} = u_o \in H^2(0,1) \cap H_o^1(0,1) \\ u_{|x=o} = u_{|x=1} = 0 , \ u \in C^o(0,T;\mathcal{D}) \cap C^1(0,T;H) . \end{cases}$$

2) Existence de la solution. Propriétés générales.

Lemme 4. Le problème (1) est équivalent au problème

$$(2) \qquad u(t) = e^{-Lt}u_o + \int_o^t e^{-L(t-\tau)} M[u(\tau)]\, d\tau , \quad u \in C^o(0,T;\mathcal{D}) ,$$

où $u_o \in \mathcal{D}$.

Démonstration : En effet, si u est solution de (1), alors $M(u) \in C^o(0,T;K)$ et d'après le Lemme 2, on a bien (2).

Réciproquement : (2) $\Longrightarrow M(u) \in C^o(0,T;K)$, d'où l'intégrale du second membre $\in C^o(0,T;\mathcal{D}) \cap C^1(0,T;H)$ comme on l'a vu au §.II. D'autre part $t \longrightarrow e^{-Lt}u_o \in C^o(0,T;\mathcal{D}) \cap C^1(0,T;H)$, et $u(t) \xrightarrow[t\to o^+]{} u_o$ dans $\mathcal{D}$. Le fait que $u(t)$ vérifie l'équation (1) se déduit du Lemme 2.

Théorème 1. Existence et unicité de la solution de (1).
$\forall u_o \in \mathcal{D}$, il existe une solution de (1) pour tout $T < T_m(u_o)$. De plus,

* grâce à l'existence de $c>0$ tel que $\sup_{x\in(o,1)} (|u(x)|,|\frac{du}{dx}(x)|) \leqslant c\|u\|_{\mathcal{D}}$.

<u>2ème étape</u> : Unicité de la solution sur $[0,T_m[$.

Soient deux solutions u et v bornées sur $[0,T]$, on note $w = u - v$. On a donc

$$w(t) = \mathcal{B}_t(u) - \mathcal{B}_t(v) ,$$

d'où $\|w(t)\|_{\mathcal{D}} \leqslant I(t) \sup_{\tau\in(0,t)} \|M[u(\tau)] - M[v(\tau)]\|_K$.

Soit alors $K(t) = \max\{M \sup_{\tau\in(0,t)} \|u(\tau)\| , M \sup_{\tau\in(0,t)} \|v(\tau)\|\}$,

ce qui donne

$$\|w(t)\|_{\mathcal{D}} \leqslant I(t)\, K(t)\, D(t) .$$

Or, le second membre est une fonction croissante de t , d'où l'on a

$$D(t) \leqslant I(t)\, K(t)\, D(t)$$

et $\exists\, T_1$ tel que $I(T_1)K(T_1) = 1/2$, d'où $D(t) = 0$ pour $t \in [0,T_1]$ (si $T_1 > T$, on a déjà l'unicité sur $[0,T]$ cherchée).

Notons alors $[0,s]$ l'intervalle maximal inclus dans $[0,T]$ tel que $D(t) = 0 \quad \forall\, t \in [0,s]$. Il en résulte que pour $t \geqslant s$, on a

$$w(t) = \int_s^t e^{-L(t-\tau)}(M[u(\tau)] - M[v(\tau)])\, d\tau ,$$

et si l'on note $K = \sup_{t\in[0,T]} K(t)$,

$$\|w(t)\|_{\mathcal{D}} \leqslant \int_s^t \|e^{-L(t-\tau)}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})}\, KD(t)\, d\tau \leqslant I(t-s).K.D(t) .$$

Si $t \in [s,s+\delta]$ où δ vérifie $I(\delta).K = 1/2$, alors $D(t) = 0$ et il y a contradiction avec la maximalité de $[0,s]$, d'où l'unicité sur $[0,T]$, $\forall\, T < T_m$.

<u>3ème étape</u> : Analyticité en u_0 $(T<\infty)$.

Comme l'application $t \longrightarrow D\, M[u(t)]$ de $[0,T]$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{D};K)$ est continue, il en résulte que $\|D\, M[u(t)]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D};K)} \leqslant C$, $t \in [0,T]$, (on a noté $D\, M(u)$ la dérivée de $u \longrightarrow M(u)$ au point u). Alors $\exists\, \delta > 0$ tel que :

$$|||D\mathcal{B}(u)|||_{\mathcal{L}[C^0(0,\delta;\mathcal{D})]} = \sup_{t\in[0,\delta]} \left\| \int_0^t e^{-L(t-\tau)} D\, M[u(\tau)]\,d\tau \right\|_{\mathcal{L}[C^0(0,\delta;\mathcal{D});\mathcal{D}]} < 1 \, ,$$

et si l'on note

$$\mathcal{F}(u_0,u) \equiv u(t) - e^{-Lt}u_0 - \mathcal{B}_t(u) = 0 \quad \text{dans} \quad C^0(0,T;\mathcal{D}) \, ,$$

$\mathcal{F}$ est analytique de $\mathcal{D} \times C^0(0,T;\mathcal{D})$ dans $C^0(0,T;\mathcal{D})$ et vérifie $D_2\mathcal{F}(u_0,u) = \mathbf{1} - D\mathcal{B}(u)$, avec $\|D\mathcal{B}(u)\| < 1$ dans $\mathcal{L}[C^0(0,\delta;\mathcal{D})]$. Il en résulte que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites (théorème 3 du chapitre 6) pour conclure à l'analyticité de u en u_0 sur $[0,\delta]$. $u(\delta)$ est donc analytique en u_0 et si on recommence le raisonnement en remplaçant u_0 par $u(\delta)$ on obtient l'analyticité en $u(\delta)$ sur $[\delta,2\delta]$, c'est-à-dire en fait l'analyticité en u_0 sur $[0,2\delta]$. En itérant le processus, on recouvre $[0,T]$ par un nombre fini de tels intervalles et u sera donc bien analytique en u_0 sur $[0,T]$. ∎

<u>Remarque</u>. Si $u_0 = 0$, on a $u=0$ sur $[0,\infty[$ et l'analyticité est bien vérifiée sur $[0,T]$, $\forall\, T < +\infty$.

IV. <u>Comportement de la solution quand $t \longrightarrow \infty$</u>.

1) <u>Définitions</u>.

<u>Stabilité d'une solution stationnaire</u>.

Soit $\mathcal{U}$ une solution stationnaire (indépendante de t) de l'équation

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} + Lu - M(u) = 0 \, , \quad u \in C^0(0,\infty;\mathcal{D}) \cap C^1(0,\infty;H) \, ,$$

sera dite <u>stable</u> si $\forall$ le voisinage $\mathcal{V}_1(\mathcal{U})$ dans $\mathcal{D}$, $\exists$ un voisinage $\mathcal{V}_2(\mathcal{U})$ tel que $\forall\; u_0\; (\neq \mathcal{U}) \in \mathcal{V}_2(\mathcal{U})$, $\exists$ une solution $u(t)$ de (1) vérifiant $u(0) = u_0$, telle que $\forall\, t \in [0,\infty[$, $u(t) \in \mathcal{V}_1(\mathcal{U})$.

Si $\mathcal{U}$ n'est pas stable, on dira que $\mathcal{U}$ est <u>instable</u>.

<u>Stabilité asymptotique</u>.

On dira que $\mathcal{U}$ est asymptotiquement stable si :

i) $\mathcal{U}$ est stable, ii) $\forall\, u_o \in \mathcal{V}_2(\mathcal{U})$, $\lim_{t\to\infty} u(t) = \mathcal{U}$ dans $\mathcal{D}$.

Stabilité exponentielle.

On dira que $\mathcal{U}$ est exponentiellement stable si :
i) $\mathcal{U}$ est asymptotiquement stable, ii) $\exists\ \eta>0$ tel que $\lim_{t\to\infty} (u(t)-\mathcal{U})e^{\eta t}=0$ dans $\mathcal{D}$.

2) Cas où tout le spectre de L est du côté des réels > 0 .

Théorème 2. Si le spectre $\sigma(L)$ est tel que $\forall\ \zeta\in\sigma(L)$, $\mathcal{R}e\ \zeta \geq \xi > 0$, alors $\exists\ \delta_1$ tel que si $\|u_o\|_{\mathcal{D}} < \delta_1$, $\exists$ une solution unique u dans $C^o(0,\infty;\mathcal{D})$, dépendant analytiquement de u_o , et telle que $u(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ exponentiellement (la solution nulle est exponentiellement stable).

Démonstration : Nous sommes dans le cadre des hypothèses du Lemme 3. Si $\|u_o\|_{\mathcal{D}} < \delta_1$, alors $\|e^{-Lt}u_o\|_{\mathcal{D}} \leq k_o\delta_1 e^{-\tilde{\xi}t}$, $\tilde{\xi}>0$. Si nous posons successivement :

$$u_1(t) = e^{(\tilde{\xi}/2)t}u(t),\ L_1 = L - \frac{\tilde{\xi}}{2}\mathbb{I}\ ,\ \text{et}$$

$$\mathcal{B}_t^{(1)}(u_1) = e^{(\tilde{\xi}/2)t}\mathcal{B}_t(u) = \int_0^t e^{-L_1(t-\tau)}e^{(\tilde{\xi}/2)\tau}M[e^{-(\tilde{\xi}/2)\tau}u_1(\tau)]\ d\tau\ ,$$

alors $u_1 \longrightarrow e^{(\tilde{\xi}/2)\tau}M[e^{-(\tilde{\xi}/2)\tau}u_1(\tau)]$ est analytique de $C^o(0,\infty;\mathcal{D})$ dans $C^o(0,\infty;K)$ et l'on a, d'après les propriétés de M :

$$\|e^{(\tilde{\xi}/2)\tau}M[e^{-(\tilde{\xi}/2)\tau}u_1(\tau)]\|_K \leq \gamma e^{-(\tilde{\xi}/2)\tau}\|u_1(\tau)\|^2_{\mathcal{D}}\ ,\ \text{si}\ |||u_1||| \leq \delta_o\ .$$

Il en résulte que $u_1 \longrightarrow \mathcal{B}_t^{(1)}(u_1)$ est analytique dans $C^o(0,\infty;\mathcal{D})$ au voisinage de 0 , et telle que

$$\|\mathcal{B}_t^{(1)}(u_1)\|_{\mathcal{D}} \leq k_1\Big[\int_0^\infty\Big(1+\frac{1}{\tau^\alpha}\Big)e^{-(\tilde{\xi}/2)\tau}d\tau\Big]|||u_1|||^2_{\mathcal{D}_\infty} = \gamma_1|||u_1|||^2_{\mathcal{D}_\infty}\ ,$$

d'où l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} + L_1u_1 = e^{(\tilde{\xi}/2)t}M(e^{-(\tilde{\xi}/2)t}u_1)\ , \\ u_1(0) = u_o \in \mathcal{D}\ ,\ u_1 \in C^o(0,\infty;\mathcal{D}) \cap C^1(0,\infty;H)\ , \end{cases}$$

est équivalente à

$$(2) \qquad u_1(t) = e^{-L_1 t} u_o + \mathcal{B}_t^{(1)}(u_1) \; , \; u_1 \in C^o(0,\infty;\mathcal{D}) \; ,$$

et (2) admet une solution unique $u_1 \in C^o(0,\infty;\mathcal{D})$, analytique en u_o au voisinage de 0 , par l'application du théorème 3 du chapitre 6.

Or $u(t) = e^{-(\tilde{\xi}/2)t} u_1(t)$ et $\|u(t)\| \leqslant e^{-(\tilde{\xi}/2)t} \|u_1\|_{\mathcal{D}_\infty} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ exponentiellement. ▮

<u>Corollaire</u>*. <u>Si</u> L <u>est à résolvante compacte, et si</u> $\sigma(L)$ <u>est tel que</u> $\forall \zeta \in \sigma(L)$, $\mathcal{R}e\, \zeta > 0$, <u>alors le résultat du théorème 2 est encore vrai</u>.

<u>Démonstration</u> : En effet, le spectre de L est constitué de valeurs propres isolées, et d'autre part il est situé dans le secteur de $\mathbb{C}$: $\{\zeta ; |\arg(\zeta+\gamma)| \leqslant \pi/2-\omega\}$. Il y a donc au plus un nombre fini de valeurs propres de L de parties réelles $< \xi$, $\forall \xi > 0$. Il en réuslte l'existence d'un $\xi > 0$ tel que $\mathcal{R}e\, \zeta \geqslant \xi$, $\forall \zeta \in \sigma(L)$. ▮

3) <u>Cas où une partie du spectre de L est du côté des réels <0</u> .

<u>Théorème 3</u>.** <u>Si la projection du spectre</u> $\sigma(L)$ <u>sur l'axe réel est contenue dans le complémentaire d'un intervalle</u> $[\xi_1, \xi_2]$, $0 < \xi_2$, <u>et si</u> $\inf \mathrm{Re}\{\sigma(L)\} < 0$, <u>alors il existe une variété</u> $\mathcal{V}$, <u>dans un voisinage de</u> 0 <u>de</u> $\mathcal{D}$, <u>telle que</u> $\forall u_o \in \mathcal{V}$, <u>la solution</u> $u(t)$ <u>de</u> (1) <u>tend exponentiellement vers</u> 0 <u>sur</u> $\mathcal{V}$ <u>quand</u> $t \longrightarrow \infty$. $\mathcal{V}$ <u>est définie par</u> $Pu_o = \mathcal{G}[(1-P)u_o]$, <u>où</u> P <u>est la projection associée à la séparation du spectre de</u> L , $\mathcal{G}$ <u>est analytique avec</u>

$$\|\mathcal{G}[(\mathbb{1}-P)u_o]\|_{\mathcal{D}} = O(\|(1-P)u_o\|_{\mathcal{D}}^2) \; .$$

<u>Enfin, la solution nulle</u> $u \equiv 0$ <u>est instable</u>.

<u>Démonstration</u> : <u>1ère étape</u>. Par hypothèse, on peut séparer le spectre $\sigma(L)$ en deux parties disjointes σ' et σ'' , et $\sigma' \cup \sigma''$ est intérieur au secteur de $\mathbb{C}$: $\{\zeta ; |\arg(\zeta+\gamma)| \leqslant (\pi/2)-\omega\}$. σ', qui est borné à droite par la droite d'abscisse ξ_1 , est donc borné, et l'on peut entourer un voisinage de $\{-\sigma'\}$ par une courbe fermée simple Γ_1 rectifiable, à une

* cf. annexe 3, le cas où $\exists\, \zeta_o \in \sigma(L)$ tel que $\mathcal{R}e\, \zeta_o = 0$, le reste du spectre vérifiant $\mathcal{R}e\, \zeta > 0$.

** cf. annexe 4, le cas particulier où $\xi_1 < 0$.

distance positive de $\{-\sigma''\}$. On a vu au chapitre 3 qu'alors H se décompose en somme directe $H = M \oplus N$, qu'en fait $M \subset \mathcal{D}$ et que si P est la projection associée à cette séparation de $\sigma(L)$, alors $L_M P = L\, P \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D})$.

Il en résulte qu'on peut définir $e^{-L_M t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, dans $\mathcal{L}(M)$ ou $e^{-L_M t}P$ dans $\mathcal{L}(H;\mathcal{D})$, et l'on a

$$e^{-Lt}P = e^{-L_M t}P \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

grâce à l'unicité du semi-groupe dans M (cf. §.III, 3) du chapitre 5). D'autre part, on sait que $\sigma(L_M) = \sigma'$, donc $\exists\ \tilde{\xi}_o$ tel que $-\tilde{\xi}_o < \inf\{\mathrm{Re}\ \sigma'\} < 0$, et $\exists\ C_1$ vérifiant :

$$(3) \qquad \|e^{-L_M t}P\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})} \leq C_1 \sup(e^{-\xi_1 t}, e^{+\tilde{\xi}_o t}), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

comme on le démontre aisément en utilisant l'identité*:

$$(3') \qquad e^{-L_M t}P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} e^{\zeta t}(L_M+\zeta)^{-1}P\, d\zeta,$$

$(L_M+\zeta)^{-1}$ étant borné sur Γ_1 qui entoure $\{-\sigma'\}$.

Soit alors $C^o_\beta(0,\infty;\mathcal{D})$ (noté C^o_β s'il n'y a pas d'ambiguité), l'espace de Banach des fonctions u telles que $t \longrightarrow e^{\beta t}u(t) \in C^o(0,\infty;\mathcal{D})$, et dont la norme est définie par : $|||u|||_\beta = \sup\limits_{t\in(0,\infty)} \|e^{\beta t}u(t)\|_{\mathcal{D}}$.

Alors si $\xi_1 \overset{o}{\underset{<}{<}}\beta < \xi_2$, on a successivement :

i) $t \longrightarrow e^{-Lt}(\mathbb{1}-P) \in \mathcal{L}(\mathcal{D};C^o_\beta)$,

en effet, $\exists\ C_2$ tel que

$$(4) \qquad \|e^{-Lt}(\mathbb{1}-P)u_o\|_{\mathcal{D}} \leq C_2\, e^{-\xi_2 t}\|u_o\|_{\mathcal{D}}.$$

ii) $u \longrightarrow \{t \longrightarrow \hat{\mathcal{B}}_t(u) \equiv \int_o^t (\mathbb{1}-P)e^{-L(t-\tau)}M[u(\tau)]\,d\tau\}$

est une fonction analytique au voisinage de 0, de C^o_β dans lui-même.

En effet, $\exists\ C_3$ tel que

$$(5) \qquad \|(\mathbb{1}-P)e^{-L(t-\tau)}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq C_3\left[1 + \frac{1}{(t-\tau)^\alpha}\right]e^{-\xi_2(t-\tau)},$$

* obtenue en modifiant le contour Γ dans l'expression de e^{Lt}, et grâce à l'existence de $K>0$, $\|(L+\zeta)^{-1}P\|_{\mathcal{L}(H)} \leq K|\zeta|^{-1}$ pour $|\zeta|$ grand.

et si $|||u|||_\beta \leqslant \delta_o$, on a $\|e^{\beta\tau} M[u(\tau)]\|_K \leqslant \gamma\, e^{-\beta\tau}|||u|||_\beta^2$

$$\|e^{\beta t}\hat{\mathcal{B}}_t(u)\|_{\mathcal{D}} \leqslant \gamma C_3 \int_o^t (1 + \frac{1}{\tau^\alpha})\, e^{-(\xi_2-\beta)\tau} d\tau . |||u|||_\beta^2 ,$$

d'où l'analyticité évidente au voisinage de 0.

$$\text{iii)} \quad u \longrightarrow \{t \longrightarrow \check{\mathcal{B}}_t(u) \equiv \int_t^{+\infty} e^{-L_M(t-\tau)} P\, M[u(\tau)]\, d\tau\}$$

est une fonction analytique au voisinage de 0, de C^o_β dans lui-même.

En effet, si $|||u|||_\beta \leqslant \delta_o$, on a

$$\|e^{\beta t}\check{\mathcal{B}}_t(u)\|_{\mathcal{D}} \leqslant \gamma C_1 \int_t^\infty e^{(\beta-\xi_1)(t-\tau)} d\tau . |||u|||_\beta^2 ,$$

d'où l'analyticité évidente.

Si l'on cherche maintenant la solution $u \in C^o_\beta(0,\infty;\mathcal{D})$ de l'équation

$$(6) \qquad u(t) = e^{-Lt}v_o + \hat{\mathcal{B}}_t(u) - \check{\mathcal{B}}_t(u) ,$$

où v_o vérifie $P\, v_o = 0$, il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites (§.III.4) du chapitre 6) pour conclure à l'existence d'une solution unique de (6), analytique en v_o dans un voisinage de 0. Notons cette solution $\mathcal{U}(v_o,t)$.

Il en résulte que

$$u(0) = v_o - \check{\mathcal{B}}_o(u) = v_o - \check{\mathcal{B}}_o[\mathcal{U}(v_o,.)] ,$$

et
$$\begin{cases} P\, u(0) = -\check{\mathcal{B}}_o[\mathcal{U}(v_o,.)] , \\ (\mathbb{I}-P)\, u(0) = v_o . \end{cases}$$

On arrive donc finalement, pour $u(0) = u_o$, à une équation représentant une variété (plongée) $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{D}$ au voisinage de 0 :

$$(7) \qquad P\, u_o + \check{\mathcal{B}}_o\{\mathcal{U}[(\mathbb{I}-P)u_o,.]\} = 0 ,$$

dont la codimension est la dimension de M (finie ou infinie), et dont l'espace vectoriel tangent en 0 est N (noyau de P).

Si l'on suppose alors $u_o \in \mathcal{V}$, la solution de (1) telle que $u(0) = u_o$, existe, est unique, et tend exponentiellement vers 0 quand $t \longrightarrow \infty$. En effet, montrons que ce n'est autre que la solution u de (6).

Comme $u \in C^{o}_{\beta}(0,\infty;\mathcal{D})$, alors $M(u) \in C^{o}(0,\infty;K)$ et on a vu au Lemme 3 que $\hat{\mathcal{B}}(u) \in C^{o}(0,\infty;\mathcal{D}) \cap C^{1}(0,\infty;H)$ et

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathcal{B}}_t(u) = -L\hat{\mathcal{B}}_t(u) + (\mathbb{I}-P)\, M[u(t)] \ .$$

D'autre part, $\check{\mathcal{B}}(u) \in C^{o}(0,\infty;\mathcal{D}) \cap C^{1}(0,\infty;H)$

de façon évidente puisque $\forall\, h$, on a

$$\check{\mathcal{B}}_{t+h}(u) - \check{\mathcal{B}}_t(u) = (e^{-L_M h} - \mathbb{I})\,\check{\mathcal{B}}_{t+h}(u) - \int_t^{t+h} e^{-L_M(t-\tau)} PM[u(\tau)]\,dt \ ,$$

ce qui montre :

$$\frac{d}{dt}\check{\mathcal{B}}_t(u) = -L_M\,\check{\mathcal{B}}_t(u) - P\,M[u(t)] \in C^{o}(0,\infty;M) \ .$$

Enfin, si l'on note $v_o = (1-P)u_o$, alors
$t \longrightarrow e^{-Lt}v_o \in C^{o}(0,\infty;\mathcal{D}) \cap C^{1}(0,\infty;H)$ et $\frac{d}{dt}(e^{-Lt}v_o) = -L\, e^{-Lt}v_o$.

Si on applique ces résultats à $u(t)$ défini par (6), il en résulte que u est solution de (1) sur $[0,\infty[$. Or, d'après le résultat sur l'unicité des solutions de (1) (encore valable sur $[0,\infty[)$, on doit conclure que u est bien <u>la</u> solution de (1) vérifiant $u(0) = u_o \in \mathcal{V} \subset \mathcal{D}$.

<u>2ème étape</u>. Soit maintenant $\xi = -\inf \mathcal{R}e\, \sigma(L_M) > 0$, alors le rayon spectral* de e^{-L_M} est e^{ξ}, comme on pourrait le montrer à partir de (3'). Il en résulte qu'il existe ρ et u_o tels que $1 < \rho < e^{\xi T}$, $u_o \in M$,

$$\|e^{-L_M N}u_o\|_{\mathcal{D}} > \rho^{N}\|u_o\|_{\mathcal{D}} \quad \text{pour un certain} \quad N \in \mathbb{N} \ .$$

Remarquons alors que si l'on note $u(t) = \mathcal{U}(u_o,t)$ la solution de (1), telle que $u(0) = u_o$, l'application $u_o \longrightarrow \mathcal{U}(u_o,t)$ est analytique au voisinage de 0 de $\mathcal{D}$ dans $C^{o}(0,T;\mathcal{D})$ et la dérivée de Frêchet en 0 vaut :

$$D_1\mathcal{U}(u_o,t)\big|_{u_o=o} = e^{-Lt} \ .$$

D'après le théorème 1, on sait qu'il existe δ_o tel que si

---

* cf. démonstration à l'annexe 1.

$\|u_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant \delta \leqslant \delta_o$ on ait : ($\|u_o\|_{\mathcal{D}}$ peut être pris aussi petit que l'on veut)

$$\|\mathcal{U}(u_o,N) - e^{-NL}u_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant K\|u_o\|^2_{\mathcal{D}} , \quad (\exists K>0!)$$

ceci est possible car l'intervalle $[0,N]$ est borné.

On a vu au théorème 1 que si l'on ne peut trouver une solution de (1) sur $[0,\infty[$, alors $\mathcal{U}(u_o,t)$ ne peut être borné pour t assez grand. Supposons donc que $\mathcal{U}(u_o,t)$ existe sur $[0,\infty[$ et que l'on ait $\|\mathcal{U}(u_o,t)\| \leqslant \delta$, pour $t \in [0,\infty[$.

Il vient : $\|\mathcal{U}(u_o,N)\| \geqslant (\rho^N - K\|u_o\|_{\mathcal{D}}).\|u_o\|_{\mathcal{D}}$, et si l'on a $\delta \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_o$ avec $\rho^N - K\delta_1 = \rho_1 > 1$, ($\exists \delta_1$) , alors, soit $\|\mathcal{U}(u_o,N)\| \leqslant \delta$, soit l'inégalité n'a pas lieu et cela contredit l'hypothèse. Supposons donc que celle-ci ait lieu.

Alors on a immédiatement

$$\|\mathcal{U}(u_o,2N)\| \geqslant (\rho^N - K\|\mathcal{U}(u_o,N)\|_{\mathcal{D}}).\|\mathcal{U}(u_o,N)\|_{\mathcal{D}}$$

$$\geqslant \rho_1\|\mathcal{U}(u_o,N)\|_{\mathcal{D}} \geqslant \rho_1^2\|u_o\|_{\mathcal{D}} .$$

On recommence le raisonnement précédent et on itère le processus. Mais $\forall u_o$ il existe $k>0$ tel que $\rho_1^k\|u_o\|_{\mathcal{D}} > \delta$ (puisque $\rho_1 > 1$) , d'où l'incompatibilité avec l'hypothèse de départ.

On a donc montré l'existence de $\delta>0$ tel que $\forall \eta \leqslant \delta$, $\exists$ $u_o \in \mathcal{D}$ vérifiant $\|u_o\|_{\mathcal{D}} < \eta$, et $\exists$ $t>0$ tel que $\|\mathcal{U}(u_o,t)\|_{\mathcal{D}} > \delta$.

Cela prouve à l'évidence <u>l'instabilité de la solution triviale.</u> ∎

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> L <u>est à résolvante compacte, le Théorème 3 s'applique.</u>

<u>Démonstration</u> : On sait que $\sigma(L)$ est discret, sans point d'accumulation à distance finie ; d'où l'existence d'un intervalle $[\xi_1,\xi_2]$ tel que celui du théorème 3. ∎

-:-:-:-

Annexe 1.

Soit à montrer que si $\xi = \sup \Re e\, \sigma(-L_M)$, alors

$$\mathrm{spr}(e^{-L_M}) = e^{\xi} .$$

L_M est considéré comme opérateur linéaire borné dans M , et l'on a

$$e^{-L_M t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{\zeta t} (L_M+\zeta)^{-1} \, d\zeta \qquad t \gtrless 0 ,$$

où Γ_1 est une courbe simple fermée entourant le spectre de $-L_M$.
Puisque $\sigma(-L_M)$ est compact dans $\mathbb{C}$, on sait qu'il existe $\zeta_o \in \sigma(-L_M)$ tel que $\Re e\ \zeta_o = \xi$.
$\forall\, \varepsilon>0$, on peut construire Γ_1 telle que

$$\forall\, \zeta \in \Gamma \qquad\qquad e^{\zeta} \leqslant e^{\xi+\varepsilon} , \ \|(L_M+\zeta)^{-1}\| \leqslant K_\varepsilon .$$

On a alors :

$$\|(e^{-L_M})^n\| = \|e^{-nL_M}\| \leqslant K'_\varepsilon\ e^{n(\xi+\varepsilon)} ,$$

et $\lim_{n\to\infty} \|e^{-nL_M}\|^{1/n} \leqslant e^{\xi+\varepsilon} \quad (\forall\ \varepsilon)$,

d'où $\qquad \mathrm{spr}(e^{-L_M}) \leqslant e^{\xi}$.

Notons $e^{\xi_1} = \mathrm{spr}(e^{-L_M})$, alors $\forall\ \varepsilon>0$, on a

$$\|e^{-nL_M}\| \leqslant e^{n(\xi_1+\varepsilon)} \qquad \text{pour } n \geqslant N_\varepsilon ,$$

et $\exists\ K$ telle que $\|e^{-L_M t}\| \leqslant K\, e^{t(\xi_1+\varepsilon)}$, $t \geqslant 0$.
Mais, d'après l'identité

$$(L_M+\zeta)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\zeta t}\, e^{-L_M t}\, dt ,$$

on voit que si $\Re e\ \zeta > \xi_1 + \varepsilon$, $\zeta \in \rho(-L_M)$, d'où

$$\xi \leqslant \xi_1 + \varepsilon \quad (\forall\ \varepsilon) \implies \xi \leqslant \xi_1 .$$

On en conclut donc $\xi = \xi_1$ (on avait déjà montré $\xi_1 \leqslant \xi$) .

-:-:-:-

Annexe 2.

Montrons un Lemme équivalent au Lemme 1 (d'après une communication de D. et H. BREZIS).

L est par hypothèse un opérateur linéaire fermé, de domaine dense $\mathcal{D}$ dans H (Hilbert), tel que $\exists\ \gamma \in \mathbb{R}$ vérifiant pour $\varepsilon > 0$

$$\|(L+\zeta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{M_\varepsilon}{|\zeta-\gamma|} \quad \text{pour} \quad |\arg(\zeta-\gamma)| \leqslant \frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon .$$

On sait qu'alors $-L$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe e^{-Lt} dans le secteur $|\arg t| < \omega$.

Lemme préliminaire. $\exists\ C > 0$ tel que $\forall\, v \in \mathcal{D}$ on ait :

$$\|e^{-Lt}u_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant C\left[\|v\|_{\mathcal{D}} + \frac{1}{t}\|u_o - v\|_H\right] , \quad t \in]0,T] .$$

Démonstration : On sait que pour $t \in]0,T]$, $\exists\ C_1 > 0$ tel que

$$\|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})} \leqslant \frac{C_1}{t} ;$$

d'où

$$\|e^{-Lt}(u_o - v)\|_{\mathcal{D}} \leqslant \frac{C_1}{t}\|u_o - v\|_H .$$

Or $\|e^{-Lt}v\|_{\mathcal{D}} \leqslant C_2\|v\|_{\mathcal{D}}$ pour $t \in [0,T]$ (évident), ce qui nous donne :

$$\|e^{-Lt}u_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant \frac{C_1}{t}\|u_o - v\|_H + C_2\|v\|_{\mathcal{D}} . \quad \blacksquare$$

Lemme équivalent au lemme 1. Soit K tel que $\mathcal{D} \subsetneq K \subsetneq H$, une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait :

(1) $\quad \exists\ C > 0 , \quad \|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leqslant \dfrac{C}{t^\alpha} , \quad \alpha \in [0,1[, \quad t \in]0,T]$,

est que $\exists\ M > 0$ et $\delta_o > 0$ tels que

(2) $\quad \|(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leqslant M\varepsilon^{-\alpha} , \quad \alpha \in [0,1[, \quad \varepsilon \in]0,\delta_o]$.

Démonstration : a) Soit $u_o \in K$ et $v = (\mathbb{1}+tL)^{-1}u_o$, $t > 0$. D'après (2) on a $\|v\|_{\mathcal{D}} \leqslant Mt^{-\alpha}\|u_o\|_K$.

De plus, $\|v-u_o\|_H \leq \|(\mathbb{I}+tL)^{-1}-\mathbb{I}\|_{\mathcal{L}(K;H)} \cdot \|u_o\|_K$

$$= t\|L(\mathbb{I}+tL)^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;H)} \cdot \|u_o\|_K$$

$$\leq t\|(\mathbb{I}+tL)^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \cdot \|u_o\|_K \leq Mt^{1-\alpha}\|u_o\|_K .$$

D'où en appliquant le lemme préliminaire, l'estimation cherchée est obtenue, pour $\|e^{-Lt}u_o\|_{\mathcal{D}}$.

b) Réciproquement, $\exists$ k tel que $\|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq k(1+t^{-\alpha})e^{\gamma t}$ $t>0$. Or on sait que

$$(\mathbb{I}+\varepsilon L)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\, e^{-Lt}dt ,$$

ce qui permet de majorer

$$\|(\mathbb{I}+\varepsilon L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq k\int_0^\infty (1+\frac{1}{\varepsilon^\alpha\tau^\alpha})\, e^{-\frac{\tau}{2}}d\tau \ , \ \varepsilon < \frac{1}{2|\gamma|} .$$

$$\leq M\varepsilon^{-\alpha} \quad \text{pour} \quad \varepsilon \in]0, \frac{1}{2|\gamma|}] . \ \blacksquare$$

Remarque. En utilisant l'inégalité (aisément démontrable)

$$\|Le^{-Lt}u_o\|_{\mathcal{D}} \leq \frac{c'}{t}[\|v\|_{\mathcal{D}} + \frac{1}{t}\|u_o-v\|_H] \ , \ \forall v\in\mathcal{D} \ , \ t\in]0,T] ,$$

on a immédiatement (de la même manière qu'au a) du Lemme)

$$\|Le^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq \frac{c'_1}{t^{1+\alpha}} \ , \ t\in]0,T] .$$

On obtient donc ensuite comme au §.I les estimations nécessaires sur $\|Le^{-Lt} - Le^{-Ls}\|_{\mathcal{L}(K;H)}$.

Application. (la démonstration qui suit se généralise aisément à des problèmes elliptiques plus complexes (H. et D. BREZIS)).

$H = L^2(0,1)$, $\mathcal{D} = H^2(0,1)\cap H^1_o(0,1)$, $K = H^1(0,1)$, $\forall u\in\mathcal{D}$, $Lu = -\frac{d^2u}{dx^2}$

Montrons que $\|(\mathbb{I}+\varepsilon L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq M\varepsilon^{-3/4}$, $\varepsilon\in]0,\delta_o]$.

Démonstration : On sait que L est autoadjoint positif, d'où

$\|(\mathbb{I}+\varepsilon L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$, et comme $K \subsetneq H$, tout revient à montrer que $\|(\mathbb{I}+\varepsilon L)^{-1} - \mathbb{I}\|_{\mathcal{L}(K;H)} \leq M_1 \varepsilon^{1/4}$.

<u>1ère étape</u>. On considère le problème

$$(1) \qquad \begin{cases} u_\varepsilon - \varepsilon \dfrac{d^2 u_\varepsilon}{dx^2} = u , \quad u \in H \\ u_\varepsilon \in \mathcal{D} . \end{cases}$$

On a donc $(\mathbb{I}+\varepsilon L)u_\varepsilon = u \Longrightarrow u_\varepsilon = (\mathbb{I}+\varepsilon L)^{-1} u \in \mathcal{D}$.

On aura besoin d'estimations sur u_ε ; pour cela effectuons le produit scalaire de (1) avec u_ε dans H

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 - \varepsilon \int_0^1 \frac{d^2 u_\varepsilon}{dx^2} \cdot \bar{u}_\varepsilon \, dx = \int_0^1 u \cdot \bar{u}_\varepsilon \, dx$$

d'où $\qquad \|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon \left\|\dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right\|_H^2 = (u, u_\varepsilon)_H$, et

$$(2) \qquad \begin{cases} \|u_\varepsilon\|_H \leq \|u\|_H , \\ \left\|\dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right\|_H \leq \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|u\|_H . \end{cases}$$

<u>2ème étape</u>. On considère le problème (1), mais $\underline{u \in H^1(0,1)} = K$.

Effectuons le procuit scalaire de (1) avec $u_\varepsilon - u$ dans H :

$$\|u_\varepsilon - u\|_H^2 + \varepsilon \int_0^1 \frac{du_\varepsilon}{dx}\left(\frac{d\bar{u}_\varepsilon}{dx} - \frac{d\bar{u}}{dx}\right) dx + \varepsilon \left[\frac{du_\varepsilon}{dx}(1) \cdot \bar{u}(1) - \frac{du_\varepsilon}{dx}(0) \cdot \bar{u}(0)\right] = 0 .$$

Mais $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{du_\varepsilon}{dx} \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} \, dx\right| \leq \left\|\dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right\|_H \cdot \left\|\dfrac{du}{dx}\right\|_H \leq \dfrac{1}{2}\left\|\dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right\|^2 + \dfrac{1}{2}\left\|\dfrac{du}{dx}\right\|^2$,

d'où

$$(3) \quad \|u_\varepsilon - u\|_H^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_K^2 + \varepsilon\left(\left|\frac{du_\varepsilon}{dx}(1)\right| \cdot |u(1)| + \left|\frac{du_\varepsilon}{dx}(0)\right| \cdot |u(0)|\right) .$$

On sait que $|u(1)|$ et $|u(0)|$ sont majorés par $C\|u\|_K$. Il reste donc à majorer les traces $\left|\dfrac{du_\varepsilon}{dx}(0)\right|$ et $\left|\dfrac{du_\varepsilon}{dx}(1)\right|$.

<u>Remarque</u>. Si $K = H_0^1(0,1)$, alors $u(0) = u(1) = 0$ et on a prouvé qu'alors $\alpha = 1/2$ dans le lemme.

3ème étape. Pour majorer $\left|\frac{du_\varepsilon}{dx}(0)\right|$, on introduit une fonction $\theta=1$ dans un voisinage de 0 et $=0$ en dehors d'un voisinage de 0, telle qu'elle soit $C^\infty(\mathbb{R})$ et nulle dans un voisinage de 1.

Effectuons le produit scalaire de (1) avec $\theta\frac{du_\varepsilon}{dx}$ et prenons-en la partie réelle :

$$\varepsilon\int_0^1 \theta\left(\frac{d^2u_\varepsilon}{dx^2}\,\frac{d\bar{u}_\varepsilon}{dx}+\frac{d^2\bar{u}_\varepsilon}{dx^2}\cdot\frac{du_\varepsilon}{dx}\right)dx=\int_0^1\theta\left(u_\varepsilon\frac{d\bar{u}_\varepsilon}{dx}+\bar{u}_\varepsilon\frac{du_\varepsilon}{dx}\right)dx$$
$$-\int_0^1\theta\left(u\frac{d\bar{u}_\varepsilon}{dx}+\bar{u}\frac{du_\varepsilon}{dx}\right)dx\,.$$

En intégrant par partie cela devient :

$$\varepsilon\left|\frac{du_\varepsilon}{dx}(0)\right|^2=-\varepsilon\int_0^1\left|\frac{d\theta}{dx}\right|\left|\frac{du_\varepsilon}{dx}\right|^2dx+\int_0^1\frac{d\theta}{dx}\,|u_\varepsilon|^2dx-\int_0^1\left[\frac{d(\theta u)}{dx}\,\bar{u}_\varepsilon+\frac{d(\theta\bar{u})}{dx}\,u_\varepsilon\right]dx$$
$$\leqslant K\left(\varepsilon\left\|\frac{du_\varepsilon}{dx}\right\|_H^2+\|u_\varepsilon\|_H^2\right)+K'\|u\|_K\cdot\|u_\varepsilon\|_H\,.$$

D'après les inégalités (2), cela devient :

$$\varepsilon\left|\frac{du_\varepsilon}{dx}(0)\right|^2\leqslant K\|u\|_H^2+K'\|u\|_K\cdot\|u\|_H\leqslant K''\|u\|_K^2\,.$$

On obtient donc

$$\left|\frac{du_\varepsilon}{dx}(0)\right|\leqslant K_1\,\varepsilon^{-1/2}\|u\|_K\,,$$

de même

$$\left|\frac{du_\varepsilon}{dx}(1)\right|\leqslant K_1\,\varepsilon^{-1/2}\|u\|_K\,.$$

En reportant dans (3) on arrive à

$$\|u_\varepsilon-u\|_H^2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_K^2+2\varepsilon^{1/2}cK_1\|u\|_K^2\,,$$

et $\exists\ \delta_o>0$ tel que pour $\varepsilon\in]0,\delta_o]$ on ait

$$\|(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}-\mathbb{1}\|_{\mathcal{L}(K;H)}\leqslant M_1\,\varepsilon^{1/4}\,,\qquad M_1>0\,.\ \blacksquare$$

-:-:-

Annexe 3.

Considérons le cas où le spectre de L, $\sigma(L)$, est de la forme $\sigma(L) = \{\zeta_o\} \cup \tilde{\sigma}(L)$ où $\operatorname{Re} \zeta_o = 0$, ζ_o étant une valeur propre de multiplicité finie, et $\forall \zeta \in \tilde{\sigma}(L)$, $\operatorname{Re} \zeta \geq \xi > 0$.

Si l'on procède comme pour la démonstration du théorème 3, on note P la projection, associée à la séparation du spectre, à valeurs dans le sous-espace invariant associé à ζ_o, et on a

$$e^{-L_M t} P = e^{-Lt} P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{\zeta t} (L_M + \zeta)^{-1} P \, d\zeta , \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

où Γ_1 est un cercle de rayon assez petit, centré en $-\zeta_o$.

D'autre part, d'après ce que l'on a vu au chapitre 3, au §.III,2), on a

$$(L_M + \zeta)^{-1} P = \frac{P}{\zeta + \zeta_o} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(\zeta_o - L)^n P}{(\zeta + \zeta_o)^{n+1}} ,$$

où k est l'indice de la valeur propre ζ_o. Il en résulte alors, de manière évidente, que :

$$(1) \qquad e^{-L_M t} P = e^{-Lt} P = e^{-\zeta_o t} \left[P + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{t^n}{n!} (\zeta_o - L)^n P \right] \in \mathcal{L}(H ; \mathcal{D}) .$$

1) Cas où l'indice de ζ_o est supérieur à 1.

Dans ce cas $\exists u_o$ tel que $\| e^{-L_M t} P u_o \|_{\mathcal{D}} \geq Ct \| u_o \|_{\mathcal{D}}$.

Il existe donc T tel que $\| e^{-LT} u_o \|_{\mathcal{D}} \geq 2 \| u_o \|_{\mathcal{D}}$ et l'on peut faire exactement le même raisonnement que lors de la 2ème étape de la démonstration du théorème 3. Il en résulte :

Théorème 4. Si le spectre $\sigma(L)$ est de la forme $\{\zeta_o\} \cup \tilde{\sigma}(L)$, où $\operatorname{Re} \zeta_o = 0$, ζ étant valeur propre de multiplicité finie*, d'indice supérieur à 1, et où $\zeta \in \tilde{\sigma}(L) \longrightarrow \operatorname{Re} \zeta \geq \xi > 0$; alors la solution nulle de l'équation (IV.1) est instable.

---

* Dans le cas où la multiplicité est infinie, l'indice l'étant aussi, la série (1) est convergente dans $\mathcal{L}(H ; \mathcal{D})$ et les résultats du Théorème 4 s'appliquent.

2) <u>Cas où l'indice de</u> ζ_o <u>est égal à 1</u> .

Dans ce cas, on a $\| e^{-L_M t} P \| = \| P \| \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Néanmoins on ne peut pas conclure au sujet de la stabilité on non de la solution nulle. Ce problème a été traité en dimension finie par A. Liapounoff (1907) dans le cas où L possède une valeur propre nulle simple, les autres ayant leur partie réelle positive. En résumé, la stabilité, ou la non stabilité, résulte de la forme du terme non linéaire $M(u)$, chacune des deux éventualités pouvant arriver.

-:-:-:-

Annexe 4.

Nous allons établir le théorème suivant (dans le cadre des hypothèses du chapitre 7, pour les opérateurs L et M) :

Théorème 5. Si la projection du spectre $\sigma(L)$ sur l'axe réel est contenue dans le complémentaire de $[\xi_1,\xi_2]$ où $\xi_1 = -\tilde{\xi}_1 < 0 < \xi_2$, et si $\mathrm{Inf}\{\Re e\,\sigma(L)\} < 0$, alors la variété $\mathcal{V}$, définie au Théorème 3, est telle qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de 0 tel que

$$\forall u_0 \in \mathcal{O}\setminus\mathcal{V}, \ \exists\, t>0 \ \text{tel que} \ u(t) \notin \mathcal{O},$$

$u(t)$ étant la solution du problème d'évolution (IV,1).

Remarque. On peut dire que si u_0 n'est pas pris sur la variété $\mathcal{V}$, alors $u(t)$ quitte un voisinage fixe de 0.

Démonstration : On sait que la solution $u(t)$ du problème d'évolution (IV,1) vérifie l'équation :

$$(1)\quad \begin{cases} u(t) = e^{-Lt}u_0 + \displaystyle\int_0^t e^{-L(t-\tau)}M[u(\tau)]\,d\tau\,, \text{ où } u_0 \in \mathcal{D}\,,\\ u \in C^0(0,\infty;\mathcal{D})\,. \end{cases}$$

Montrons qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$, de 0, tel que si l'on veut que $u(t)$ reste dans $\mathcal{O}$ $\forall t \in (0,\infty)$, alors nécessairement $u_0 \in \mathcal{V}$. Supposons donc $\|u(t)\|_{\mathcal{D}} \leq \delta_0$, $\forall t$, et décomposons (1) sous la forme :

$$(2)\quad \begin{cases} Pu(t) = Pe^{-Lt}u_0 + \displaystyle\int_0^t e^{-L(t-\tau)}PM[u(\tau)]\,d\tau\,,\\ (1-P)u(t) = e^{-Lt}(1-P)u_0 + \widehat{\mathcal{B}}_t(u)\,. \end{cases}$$

L'application $u \longrightarrow \{t \longrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_t(u)\}$ est analytique au voisinage de 0 de $C^0(0,\infty;\mathcal{D})$ dans lui-même (même démonstration qu'au §.IV). Il en résulte que la deuxième équation du système (2) ne pose pas de problème. En revanche la première équation impose que

$$(3)\qquad e^{-L_M t}Pu_0 + \int_0^t e^{-L_M(t-\tau)}PM[u(\tau)]\,d\tau \in C^0(0,\infty;\mathcal{D})\,.$$

Or, le spectre de L_M est tel que $-\xi \leq \Re e\,\sigma(L_M) < -\tilde{\xi}_1$, d'où, $\exists C$ tel que

$$\| e^{L_M t} \|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})} \leq C\, e^{-\tilde{\xi}_1 t} \,,\quad t \geq 0 \,,$$

grâce à la représentation intégrale de $e^{-L_M t}$ déjà utilisée. Il en résulte que l'on a, d'après (3) :

$$\int_0^t e^{L_M \tau} PM[u(\tau)]\, d\tau \longrightarrow -Pu_0 \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow +\infty \,, \text{ d'où}$$

$$\int_t^\infty e^{L_M \tau} PM[u(\tau)]\, d\tau = -Pu_0 - \int_0^t e^{L_M \tau} PM[u(\tau)]\, d\tau \,,$$

et, si l'on utilise les mêmes notations qu'au §.IV,

$$-\check{\mathcal{B}}_t(u) = e^{-L_M t} Pu_0 + \int_0^t e^{-L_M (t-\tau)} PM[u(\tau)]\, d\tau \,.$$

L'équation (1) devient alors :

$$(4) \qquad \begin{cases} u(t) = e^{-Lt}(\mathbb{I}-P)u_0 + \hat{\mathcal{B}}_t(u) - \check{\mathcal{B}}_t(u) \,, \\ u_0 \in \mathcal{D} \,,\ u \in C^0(0,\infty;\mathcal{D}) \,, \end{cases}$$

ce qui coïncide avec l'équation (IV,6) avec $v_0 = (\mathbb{I}-P)u_0$. Il est alors évident que $u_0 \in \mathcal{V}$, d'après l'unicité de la solution de (4) dans $C^0(0,\infty;\mathcal{D})$. ∎

-:-:-:-:-:-

VIII - Bifurcation des solutions stationnaires.

Bifurcation des solutions stationnaires.

I . Formulation du problème.

1) Définitions.

On considèrera dans ce chapitre les solutions "voisines de 0" de l'équation

$$(1) \qquad L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0 \ , \ u \in \mathcal{D} ,$$

où L_λ est une famille d'opérateurs (réels si $\lambda \in \mathbb{R}$) dans l'Hilbert H , holomorphe de type (A), de domaine $\mathcal{D}$, $\lambda \in D_o$, à résolvante compacte, et où la fonction $(\lambda, u) \longrightarrow M_\lambda(u)$ est analytique de $D_o \times \mathcal{D}$ dans K (défini au chapitre 7), vérifiant de plus :

$$\exists \ \gamma > 0 \ \text{ tel que } \ \|M_\lambda(u)\|_K \leqslant \gamma \|u\|^2 \ \text{ si } \ \|u\|_{\mathcal{D}} \leqslant \delta_o \ .$$

Remarque. On pourrait simplement supposer dans ce chapitre M à valeurs dans H .

Lemme 1. (cf. référence [1]) . Si $\lambda_o \in \mathbb{C}$ est tel que $L^{-1}_{\lambda_o}$ existe et $\in \mathcal{L}(H)$ alors $\exists \ \delta > 0$ et $\mu > 0$ tels que $\forall \lambda$ vérifiant $|\lambda - \lambda_o| \leqslant \delta$, seul $u = 0$ soit solution de (1) dans la boule $\|u\|_{\mathcal{D}} \leqslant \mu$ (0 est solution isolée de (1) pour λ voisin de λ_o) .

Démonstration : On a donc $0 \in \rho(L_{\lambda_o})$, et d'après ce qu'on a vu au chapitre 5, il existe un voisinage $\mathcal{V}(\lambda_o)$ tel que $\lambda \longrightarrow R(0;L_\lambda) = -L^{-1}_\lambda$ soit holomorphe de $\mathcal{V}(\lambda_o)$ dans $\mathcal{L}(H;\mathcal{D})$. Il en résulte que pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$, (1) est équivalent à

$$(2) \qquad u = L^{-1}_\lambda \, M_\lambda(u) \ , \ u \in \mathcal{D} .$$

Or, $\exists \delta > 0$ tel que $|\lambda - \lambda_o| \leqslant \delta \Longrightarrow \|L^{-1}_\lambda\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})} \leqslant c_o$, et si l'on note c_1 la norme de l'injection $K \hookrightarrow H$, on a, pour $\|u\|_{\mathcal{D}} \leqslant \delta_o$

$$\|L^{-1}_\lambda \, M_\lambda(u)\|_{\mathcal{D}} \leqslant c_o \, c_1 \, \gamma \|u\|^2_{\mathcal{D}} ,$$

Il suffit alors de considérer $\mu < \inf\{(c_o\ c_1\gamma)^{-1}, \delta_o\}$ pour voir que (2) entraîne $\|u\| \leqslant c_o c_1 \gamma \|u\|^2$, et $\|u\| \leqslant \mu$ donne $u=0$. ∎

<u>Définition d'un point de bifurcation</u> (cf. référence [1]).

λ_o <u>est appelé "point de bifurcation" si</u> $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta_o>0$ <u>tel que</u> $\forall\, \delta \in]0,\delta_o]$, $\exists\, \lambda$ <u>tel que</u> $|\lambda-\lambda_o| < \varepsilon$ <u>et tel qu'il existe une solution</u> u_λ <u>de</u> (1) <u>avec</u> $\|u_\lambda\|_{\mathcal{D}} = \delta$.

<u>Remarque</u>. Pour toute boule de rayon assez petit δ , $\exists$ au moins une solution de (1) sur sa frontière, correspondant à un λ voisin de λ_o . D'autre part la définition n'implique même pas la continuité en λ_o : $(u_{\lambda_o}=0)$ pour $\lambda \longrightarrow u_\lambda$ (prolongée par 0 , là où elle n'est pas définie).

<u>Théorème 1</u>. <u>Condition nécessaire pour qu'il y ait bifurcation en</u> λ_o.

<u>Une condition nécessaire, pour que</u> λ_o <u>soit point de bifurcation de (1), est que</u> L_{λ_o} <u>n'admette pas d'inverse dans</u> $\mathcal{L}(H)$.

<u>Démonstration</u> : Cela résulte immédiatement du Lemme 1 et de la définition d'un point de bifurcation. ∎

<u>Exemples</u>.* 1) $\begin{cases} \lambda u - u^3 = 0 \\ u \in \mathbb{R} . \end{cases}$

$\lambda=0$ est point de bifurcation (point singulier pour l'opérateur $u \to \lambda u$ dans $\mathbb{R}$) . Pour $\lambda \leqslant 0$, il n'y a que la solution $u=0$, mais pour $\lambda>0$ il y a en plus $u = \pm(\lambda)^{1/2}$, ce qui fait trois solutions.

2) $$\begin{cases} \lambda v + u(u^2+v^2) = 0 \\ -\lambda u + v(u^2+v^2) = 0 \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2 ,$$

L'opérateur linéaire associé à ce système n'est pas inversible pour $\lambda=0$, néanmoins il n'y a pas de bifurcation, la seule solution $\forall\, \lambda$ étant $u=v=0$.

3) $$(3)\begin{cases} -u'' - \lambda u + u^3 + \dfrac{uu'^2}{\pi^2} = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad u \in H^2(0,1) \cap H^1_o(0,1) .$$

$\lambda=\pi^2$ est valeur propre simple de l'opérateur $u \longrightarrow -u''$ dans $H^2 \cap H^1_o$ (déjà vu). Or on voit que (3) donne :

---

* cf. à l'annexe 1, d'autres exemples simples de bifurcations.

$$\|u'\|^2 - \lambda\|u\|^2 + \|u^2\| + \left\|\frac{uu'}{\pi}\right\|^2 = 0 ,$$

et comme on sait que $\|u'\|^2 \geqslant \pi^2\|u\|^2$ * si $u \in H^2 \cap H_o^1(0,1)$, il en résulte que si $\lambda \leqslant \pi^2$ il n'y a pas d'autre solution que 0.
Maintenant si $\lambda > \pi^2$ on trouve deux solutions non triviales : $u = \pm(\lambda-\pi^2)^{1/2} \sin \pi x$. On dit que $\lambda = \pi^2$ est un point de "bifurcation à droite".

4) Si on considère

$$\begin{cases} -u'' - \lambda u + (\lambda-\pi^2)u' \cos \pi x + u^2 \sin \pi x + \dfrac{uu'}{\pi} \cos \pi x - \dfrac{u'^2}{\pi} = 0 ; \\ u \in H^2 \cap H_o^1(0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 , \end{cases}$$

alors $\lambda = \pi^2$ est encore un point de bifurcation, mais ici la solution non triviale "voisine de 0" quand λ est voisin de π^2 est : $u = (\lambda-\pi^2) \sin \pi x$, la bifurcation est donc bilatère en $\lambda = \pi^2$.

2) Relation avec le problème d'évolution.

Nous étudierons au chapitre IX comment se rattache l'étude des solutions de (1), de "normes petites" au comportement de la solution du problème aux valeurs initiales

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0 , \quad u \in C^o(0,\infty;\mathcal{D}) \cap C^1(0,\infty;H) , \\ u(0) = u_o \in \mathcal{D} . \end{cases}$$

Nous avons vu au chapitre 7 que, lorsque le spectre de L_λ est situé tout entier du côté des réels >0, alors pour $\|u_o\|$ assez petit, $u(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, et que d'autre part, si $\exists$ une valeur propre (le spectre étant discret) de partie réelle <0, alors $\exists\, u_o$ (avec $\|u_o\|$ petit) tel que $u(t) \underset{t\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Il est donc intéressant d'étudier le comportement de $u(t)$ dans une telle situation, et c'est pourquoi nous allons faire l'hypothèse suivante :

[H.1. $\exists\, \lambda_o \in \mathbb{R}$ tel que $\inf\{\Re e[\sigma(L_\lambda)]\}$ devient négatif quand $\lambda \in \mathbb{R}$ devient plus grand que λ_o.

Dorénavant, $u\equiv 0$ est donc une solution instable de (4), et il s'agit

---

* cf. exercices du chapitre 3.

de savoir s'il existe une autre solution $\mathcal{U}(\lambda)$ de (4), indépendante de t (stationnaire) qui, elle, soit stable. Mais nous avons vu au théorème 1 que si l'on souhaite trouver $\mathcal{U}(\lambda)$, de norme petite pour λ voisin de λ_o, solution de (1), il est nécessaire que λ_o soit tel que $L_{\lambda_o}^{-1} \notin \mathcal{L}(H)$, c'est-à-dire que $0 \in \sigma(L_{\lambda_o})$. Or, a priori, H.1 n'implique que l'existence d'un certain nombre de valeurs propres imaginaires pures pour $\lambda = \lambda_o$, c'est pourquoi nous allons faire l'hypothèse :

[H.2. Seul $0 \in \sigma(L_{\lambda_o}) \cap \{\text{axe } \mathrm{Re}\, z = 0\}$.

Comme L_{λ_o} est à résolvante compacte, la multiplicité de 0 est finie $= m^o$.

<u>Exemples</u>.

1) $$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \lambda u + u^3 = 0 , & u \in C^1(0,\infty;\mathbb{R}) , \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

alors pour $\lambda \leq 0$, $\forall u_o$, $u(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$;

pour $\lambda > 0$ $\forall u_o \neq 0$, $u(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \pm(\lambda)^{1/2}$ selon le signe de u_o.

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda u + u^3 + \dfrac{uu'^2}{\pi^2} = 0 \\ u \in C^0(0,\infty;H^2 \cap H_o^1) \cap C^1(0,\infty;H^2 \cap H_o^1) \\ u(0) = u_o \in H^2 \cap H_o^1(0,1) . \end{cases}$$

On trouve de façon analogue à ce qu'on a fait au 1) que si $\lambda \leq \pi^2$, la solution $u \equiv 0$ est stable (exponentiellement stable si $\lambda < \pi^2$). D'autre part, si $\lambda > \pi^2$, on montrerait que les solutions bifurquées sont stables alors que la solution nulle est instable (en effet, la valeur propre la plus à gauche de l'opérateur linéaire associé est $\pi^2 - \lambda < 0$).

II. <u>Décomposition du problème</u>.

1) <u>Structure de L_λ^{-1} au voisinage de</u> λ_o (cf. référence [2]).

On suppose donc que $\{L_\lambda\}_{\lambda \in D_o}$, est une famille holomorphe de type (A), où D_o est ouvert connexe dans $\mathbb{C}$. On suppose de plus que L_λ est à résolvante compacte et que $0 \in \sigma(L_{\lambda_o})$. On va montrer que si $\exists\ \lambda_1 \in D_o$ tel que $L_{\lambda_1}^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, alors λ_o est un <u>pôle</u> pour L_λ^{-1}.

0 est donc valeur propre de multiplicité finie m de L_{λ_o} et un point isolé de $\sigma(L_{\lambda_o})$. On peut donc définir

$$P(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta - T(\lambda))^{-1}\, d\zeta$$

pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$, et Γ entourant 0. $\lambda \longrightarrow P(\lambda)$ est analytique dans $\mathcal{V}(\lambda_o)$, à valeurs dans $\mathcal{L}(H;\mathcal{D})$. On sait que
$\tilde{L}_\lambda = L_\lambda P(\lambda)$ sur $M_\lambda = P(\lambda).\{H\} \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D})$, et que
$\tilde{L}_\lambda^c = L_\lambda(\mathbb{1} - P(\lambda)) \in \mathcal{F}(H)$.

On introduit la famille d'opérateurs :

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= P(\lambda_o)\ P(\lambda) + [\mathbb{1} - P(\lambda_o)][\mathbb{1} - P(\lambda)] \\ &= \mathbb{1} + (\lambda - \lambda_o)\ \{P(\lambda_o)\ P^{(1)} - [\mathbb{1} - P(\lambda_o)]P^{(1)}\} + O(\lambda - \lambda_o)\ . \end{aligned}$$

Alors $U(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$ et $U(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$.

Notons encore que : $\begin{cases} U(\lambda)\{M_\lambda\} = \{M_{\lambda_o}\}\ , \\ U(\lambda)\{N_\lambda\} = \{N_{\lambda_o}\}\ , \end{cases}$

et $\begin{cases} U(\lambda)\ P(\lambda) = P(\lambda_o)\ U(\lambda)\ , \\ U(\lambda)\ [\mathbb{1} - P(\lambda)] = [\mathbb{1} - P(\lambda_o)]\ U(\lambda)\ . \end{cases}$

Il en résulte que l'on peut définir l'opérateur fermé

$B(\lambda) = U(\lambda)\ L_\lambda\ U(\lambda)^{-1}$, de domaine $\mathcal{D}$ car $U(\lambda)$ envoie $\mathcal{D}$ sur lui-même $[U(\lambda) - \mathbb{1} \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D})]$. Les opérateurs $B(\lambda)$ et L_λ sont équivalents, mais $B(\lambda)$ est décomposé par une projection indépendante de λ : $P(\lambda_o)$.

Définissons alors

$$\begin{cases} \tilde{B}(\lambda) = U(\lambda)\ \tilde{L}_\lambda\ U(\lambda)^{-1} \\ \tilde{B}^c(\lambda) = U(\lambda)\ \tilde{L}_\lambda^c\ U(\lambda)^{-1}\ , \end{cases}$$

nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \widetilde{B}(\lambda) \in \mathcal{L}(H) & \text{et laisse invariant } M_{\lambda_o} , \\ \widetilde{B}^c(\lambda) \in \mathcal{F}(H) & \text{et laisse invariant } N_{\lambda_o} . \end{cases}$$

D'autre part, $\zeta \in \rho(L_\lambda) \iff \zeta \in \rho[B(\lambda)]$, puisque

$U(\lambda)(\zeta - L_\lambda)^{-1} U(\lambda)^{-1} = [\zeta - B(\lambda)]^{-1}$. D'où $\sigma(L_\lambda) = \sigma[B(\lambda)]$.

Nous avons les identités :

$$[\zeta - B(\lambda)]^{-1} = [\zeta - \widetilde{B}(\lambda)]^{-1} P(\lambda_o) + [\zeta - \widetilde{B}^c(\lambda)]^{-1}[\mathbb{I} - P(\lambda_o)] ,$$

$$[\zeta - \widetilde{B}(\lambda)]^{-1} P(\lambda_o) = U(\lambda)[\zeta - \widetilde{L}_\lambda]^{-1} P(\lambda) U(\lambda)^{-1} ,$$

$$[\zeta - \widetilde{B}^c(\lambda)]^{-1}[\mathbb{I} - P(\lambda_o)] = U(\lambda) [\zeta - \widetilde{L}^c_\lambda]^{-1} [\mathbb{I} - P(\lambda)] U(\lambda)^{-1} ,$$

qui entraînent que

$$\sigma(\widetilde{L}_\lambda) = \sigma(\widetilde{B}(\lambda)) , \sigma(\widetilde{L}^c_\lambda) = \sigma[\widetilde{B}^c(\lambda)] .$$

Montrons qu'il n'existe pas de suite $\{\lambda_n\}$ convergente vers λ_o telle que L_{λ_n} admette 0 comme valeur propre. Cela entraînera l'existence de $\mathcal{V}(\lambda_o)$ tel que pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o) - \{\lambda_o\}$, 0 ne sera pas valeur propre de L_λ , et donc $L_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

<u>Démonstration</u> : En effet, si $\exists \{\lambda_n\} \longrightarrow \lambda_o$, telle que $0 \in \sigma(L_{\lambda_n})$, $n>0$, il en résulterait que $\widetilde{B}(\lambda_n)$, qui opère dans M_{λ_o} de dimension m , aurait un déterminant nul, pour $n>0$. Mais, puisque $\lambda \longrightarrow \text{dét}[\widetilde{B}(\lambda)]$ est analytique dans $\mathcal{V}(\lambda_o)$, il en résulterait que $\text{dét}[\widetilde{B}(\lambda)] \equiv 0 \ \forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$, d'où $0 \in \sigma(L_\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$. Or, on sait que l'ensemble des points d'accumulations de l'ensemble $\{\lambda \in D_o ; \text{dét}[\widetilde{B}(\lambda)] = 0\}$ est fermé dans D_o , et nous avons montré que cet ensemble est ouvert. Comme D_o est connexe, cet ensemble serait donc identique à D_o tout entier. Or ceci contredit l'hypothèse de l'existence de $\lambda_1 \in D_o$ tel que $L_{\lambda_1}^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. λ_o est donc un point isolé de D_o tel que 0 soit dans $\sigma(L_{\lambda_o})$. ▮

Montrons maintenant que λ_o est un pôle de L_λ^{-1} pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$.

<u>Démonstration</u> : En effet, on remarque que $\widetilde{B}^c(\lambda)$ est inversible pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$ puisque son spectre ne contient pas 0. On écrit :

(1) $$\widetilde{B}^c(\lambda)^{-1} = \sum_{n=o}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, Q^{(n)} \in \mathcal{L}(N_{\lambda_o}) .$$

Or, on remarque, comme au chapitre 5, qu'en fait

$$\widetilde{B}^c(\lambda)^{-1}[\mathbb{I}-P(\lambda_o)] \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D}) \quad \text{et} \quad Q^{(n)}[\mathbb{I}-P(\lambda_o)] \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D}) ,$$

la convergence de (1) a lieu dans $\mathcal{L}(H \cap N_{\lambda_o};\mathcal{D})$.

D'autre part, si $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o) - \{\lambda_o\}$, on a

$$\widetilde{B}(\lambda)^{-1} = \sum_{n=-N}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, C^{(n)} \in \mathcal{L}(M_{\lambda_o}) ,$$

$$C^{(-N)} \neq 0 , \quad N>0 ,$$

où N est $\leqslant$ à l'ordre du zéro de $\text{dét}[\widetilde{B}(\lambda)]$ en λ_o. Il en résulte que pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o) - \{\lambda_o\}$:

(2) $$L_\lambda^{-1} = \sum_{n=-N}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, U^{-1}(\lambda)\, \{C^{(n)}P(\lambda_o) + Q^{(n)}[\mathbb{I}-P(\lambda_o)]\}\, U(\lambda),$$

où $Q^{(n)} = 0$ pour $n<0$, c'est-à-dire que L_λ^{-1} est de la forme

(2') $$L_\lambda^{-1} = \sum_{n=-N}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, B^{(n)} ,$$

où $B^{(n)} \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D})$, $B^{(-N)} \in \mathcal{L}(H;M_{\lambda_o} \cap \mathcal{D})$ et où $\exists\ \delta>0$ tel que la série converge pour $0<|\lambda-\lambda_o|<\delta$ dans $\mathcal{L}(H;\mathcal{D})$. ∎

<u>Lemme 2</u>. <u>Soit</u> $\{L_\lambda\}_{\lambda \in D_o}$, D_o <u>domaine de</u> $\mathbb{C}$, <u>une famille holomorphe de type (A) dans</u> H, <u>de domaine</u> $\mathcal{D}$, <u>à résolvante compacte. Si</u> 0 <u>est valeur propre d'indice</u> 1 (<u>semi-simple</u>) <u>de</u> L_{λ_o}, <u>et si</u> $P(\lambda_o)L^{(1)}u \neq 0$, $\forall u \neq 0$ <u>vérifiant</u> $L_{\lambda_o}u = 0$, <u>alors, si</u> $\exists\ \lambda_1 \in D_o$ <u>tel que</u> $L_{\lambda_1}^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, λ_o <u>est un pôle d'ordre 1 de</u> L_λ^{-1} <u>qui peut s'écrire</u> :

(3) $$L_\lambda^{-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, B^{(n)} , \quad B^{(n)} \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D}) , \quad B^{(-1)} \in \mathcal{L}(H;M_{\lambda_o}) ,$$

la série convergeant dans $\mathcal{L}(H;\mathcal{D})$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o) - \{\lambda_o\}$.

Démonstration : Il reste à démontrer que dans la formule (2'), on a $N=1$. Or, on sait que $N \geq 1$ puisque L_{λ_o} n'est pas inversible. Effectuons le produit $L_\lambda . L_\lambda^{-1} = 1$ dans $\mathcal{L}(H)$. On obtient

$$\frac{L_{\lambda_o} B^{(-N)}}{(\lambda-\lambda_o)^N} + \frac{L^{(1)} B^{(-N)} + L_{\lambda_o} B^{(-N+1)}}{(\lambda-\lambda_o)^{N-1}} + \dots = 1 .$$

Comme 0 est valeur-propre semi-simple, on doit avoir $L_{\lambda_o} B^{(-N)} = 0$, et il en résulte que si $N>1$, on a nécessairement

$$L^{(1)} B^{(-N)} + L_{\lambda_o} B^{(-N+1)} = 0 .$$

Cela entraîne $P(\lambda_o)\, L^{(1)}\, B^{(-N)} = 0$, car $P(\lambda_o)\, L_{\lambda_o} = 0$. Or, par hypothèse l'opérateur $P(\lambda_o)\, L^{(1)}\, P(\lambda_o)$ est injectif, donc inversible, sur M_{λ_o} (dimension finie). Il en résulte que $B^{(-N)} = 0$ d'où la contradiction, et $N = 1$. ∎

Remarque 1. On obtient en passant : $P(\lambda_o)\, L^{(1)}\, B^{(-1)} = P(\lambda_o)$, d'où $B^{(-1)} = [P(\lambda_o) L^{(1)} P(\lambda_o)]^{-1} . P(\lambda_o)$, où $P(\lambda_o)\, L^{(1)}\, P(\lambda_o)$ est considéré dans $\mathcal{L}(M_{\lambda_o})$.

Remarque 2. L'hypothèse d'injectivité de $P(\lambda_o)\, L^{(1)}\, P(\lambda_o)$ sur M_{λ_o} , revient à supposer que les valeurs propres de L_λ voisines de 0 sont de la forme :

$$\zeta_i = (\lambda-\lambda_o)\, \zeta_i^{(1)} + O(\lambda-\lambda_o) , \text{ avec } \zeta_i^{(1)} \neq 0 ,$$

où $\zeta_i^{(1)}$ est valeur propre de $P(\lambda_o)\, L^{(1)}\, P(\lambda_o)$ (cf. §.II, 3) du chapitre 5)).

2) Décomposition du problème (1ère méthode, dite "naturelle").

L'idée, c'est de ramener l'équation

(4) $$L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0 , \quad u \in \mathcal{D},$$

à un système en dimension finie, en éliminant une partie de dimension infinie qui ne pose pas de problème. Les hypothèses sont les suivantes :

i) $\{L_\lambda\}_{\lambda \in D_o}$ est une famille holomorphe de type (A), de domaine $\mathcal{D}$, à résolvante compacte dans H ;

ii) 0 est valeur propre de L_{λ_o} , de multiplicité m ;

iii) $\exists\, \lambda_1 \in D_o$ tel que $L_{\lambda_1}^{-1} \in \mathcal{L}(H)$;

iv) $(\lambda, u) \longrightarrow M_\lambda(u)$ est analytique de $D_o \times \mathcal{D}$ dans K , et vérifie : $\exists\, \gamma > 0$, $\|M_\lambda(u)\|_K \leq \gamma \|u\|^2$, si $\|u\|_{\mathcal{D}} \leq \delta_o$.

On a vu que si $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o) - \{\lambda_o\}$, $L_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H;D)$ et admet le développement en série (2). L'équation (4) est donc équivalente à

$$u = L_\lambda^{-1} M_\lambda(u) \,,\quad u \in \mathcal{D} \,,\ \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o) - \{\lambda_o\} \,. \tag{5}$$

Or, la formule (2) permet d'écrire :

$$\begin{cases} P(\lambda)\, L_\lambda^{-1} = \displaystyle\sum_{n=-N}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, \tilde{B}^{(n)} P(\lambda) \,,\ \tilde{B}^{(n)} \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D}) \,,\ \tilde{B}^{(-N)} = B^{(-N)} \,, \\ [\mathbb{1}-P(\lambda)] L_\lambda^{-1} = \displaystyle\sum_{n=o}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, \tilde{R}^{(n)} [\mathbb{1}-P(\lambda)] \,,\ \tilde{R}^{(n)} \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D}) \,, \end{cases} \tag{6}$$

et cela suggère la décomposition suivante de $\mathcal{D}$:

$$u = \bar{u} + v \quad \text{avec} \quad \bar{u} = P(\lambda)u \,,\quad v = [\mathbb{1}-P(\lambda)]u \,,$$

et $\bar{u} \in M_\lambda$ de dimension m . L'équation (5) devient alors le système

$$\bar{u} = \sum_{n=-N}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, \tilde{B}^{(n)}\, P(\lambda)\, M_\lambda(\bar{u}+v) \,, \tag{7}$$

$$v = \sum_{n=o}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, \tilde{R}^{(n)} [\mathbb{1}-P(\lambda)]\, M_\lambda(\bar{u}+v) \,. \tag{8}$$

3) Décomposition du problème (2ème méthode) (cf. référence [3]).

Montrons à titre de préliminaires que l'équation

$$L_{\lambda_o} u = v \,,\quad v \text{ donné } (N(L_{\lambda_o}) \text{ de dimension } n) \,, \tag{9}$$

est "normalement résoluble", c'est-à-dire que si $v \perp N(L^*_{\lambda_o})$, alors $\exists$ u solution de (9) définie à un élément de $N(L_{\lambda_o})$ près. (On suppose $\mathcal{D}$ dense dans H, pour pouvoir définir l'adjoint).

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que $R(L_{\lambda_o})$ est fermé, puisqu' alors on aura

$$R(L_{\lambda_o}) = N(L^*_{\lambda_o})^{\perp} \quad \text{et} \quad v \perp N(L^*_{\lambda_o}) \implies v \in R(L_{\lambda_o}) .$$

Soit $\{v_n\} \subset R(L_{\lambda_o})$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$, il faut montrer que $v \in R(L_{\lambda_o})$. $\exists$ $\{u_n\} \subset \mathcal{D}$ telle que $L_{\lambda_o} u_n = v_n$, et soit $u'_n = (I-P)u_n$ où P est la projection orthogonale dans H sur le noyau de L_{λ_o}. Comme P envoie H sur $N(\lambda_o) \subset \mathcal{D}$, $u'_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$ et

$$L_{\lambda_o} u'_n = v_n \longrightarrow v .$$

Or $\exists \zeta \neq 0$ tel que $(\zeta - L_{\lambda_o})^{-1}$ existe et soit compact dans H, d'où $(\zeta - L_{\lambda_o})^{-1} L_{\lambda_o} u'_n = \zeta(\zeta - L_{\lambda_o})^{-1} u'_n - u'_n \longrightarrow (\zeta - L_{\lambda_o})^{-1} v$. Si $\{u'_n\}$ est bornée, $\exists$ une sous-suite $\{u'^{(1)}_n\}$ telle que

$$(\zeta - L_{\lambda_o})^{-1} u'^{(1)}_n \longrightarrow w \quad \text{dans } H ,$$

d'où $u'^{(1)}_n \longrightarrow \zeta w - (\zeta - L_{\lambda_o})^{-1} v = u$, alors que $L_{\lambda_o} u'^{(1)}_n \longrightarrow v$.

Comme L_{λ_o} est fermé, il en résulte que $u \in \mathcal{D}$ et que $v = L_{\lambda_o} u$, d'où $v \in R(L_{\lambda_o})$.

Si $\{u'_n\}$ n'est pas bornée, $\exists$ une sous-suite $\{u'^{(1)}_n\}$ telle que $\|u'^{(1)}_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, et si l'on note $u''^{(1)}_n = \dfrac{u'^{(1)}_n}{\|u'^{(1)}_n\|}$, on a

$$\zeta(\zeta - L_{\lambda_o})^{-1} u''^{(1)}_n - u''^{(1)}_n \longrightarrow 0 , \quad u''^{(1)}_n \in \mathcal{D} \cap [N(\lambda_o)]^{\perp} .$$

$\exists$ alors une sous-suite $\{u''^{(2)}_n\}$ telle que

$$(\zeta - L_{\lambda_o})^{-1} u''^{(2)}_n \longrightarrow w \quad \text{dans } H ,$$

d'où $u_n''^{(2)} \longrightarrow \zeta w$ et $\zeta(\zeta - L_{\lambda_o})^{-1} w = w$, avec $w \in [N(\lambda_o)]^{\perp} \cap \mathcal{D}$.
Il vient $L_{\lambda_o} w = 0 \Longrightarrow w = 0$ et $u_n''^{(2)} \longrightarrow 0$ ce qui est impossible car $\|u_n''^{(2)}\| = 1$, $\forall n$. Il en résulte que la suite $\{u_n'\}$ est bornée, et que $v \in R(L_{\lambda_o})$, d'où $R(L_{\lambda_o})$ est fermé. ∎

Nous venons donc de montrer que L_{λ_o} est bijectif de $[N(L_{\lambda_o})]^{\perp} \cap \mathcal{D}$ <u>sur</u> $[N(L^*_{\lambda_o})]^{\perp}$. D'autre part, L_{λ_o} est borné de $\mathcal{D}$ dans H , il en résulte que l'on peut définir un opérateur $\widetilde{Q}$ de $[N(L^*_{\lambda_o})]^{\perp} \cap H$ dans $[N(L_{\lambda_o})]^{\perp} \cap \mathcal{D}$, qui est borné, d'après le théorème du graphe fermé.
On a donc $\widetilde{Q} L_{\lambda_o} \subset \mathbb{1} - P$, $L_{\lambda_o} \widetilde{Q}(\mathbb{1} - P^*) = \mathbb{1} - P^*$, et si l'on note P^* la projection orthogonale sur $N(L^*_{\lambda_o})$ (qui n'est pas l'adjoint de P! puisque celui-ci est P lui-même) on obtient

$$L_{\lambda_o} P = 0 \ , \quad P^* L_{\lambda_o} = 0 \ .$$

Pour décomposer l'équation (4), il suffit de faire les hypothèses i), ii) et iv) du 2). On peut écrire

$$(10) \qquad L_{\lambda_o} u = M_{\lambda}(u) - \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_o)^n L^{(n)} u \equiv N_{\lambda}(u) \ ,$$

ce qui se décompose de la manière suivante :

$$\begin{cases} P^* N_{\lambda}(u) = 0 \\ (\mathbb{1} - P) u = \widetilde{Q} N_{\lambda}(u) \ . \end{cases}$$

Nous sommes alors amenés à poser $u = \bar{u} + v$, avec $\bar{u} = Pu$ et $v = (\mathbb{1} - P) u$, et le système précédent devient :

$$(11) \qquad P^* N_{\lambda}(\bar{u} + v) = 0 \ ,$$

$$(12) \qquad v = \widetilde{Q} N_{\lambda}(\bar{u} + v) \ .$$

Il est remarquable de constater que (11) fournit une équation de dimension n [les noyaux $N(L^*_{\lambda_o})$ et $N(L_{\lambda_o})$ ont la même dimension $n \leqslant m$ = multiplicité de 0 (cf. §.III.3) du chapitre 3)] , c'est-à-dire qu'il y a un gain relativement à l'équation (7) qui est de dimension m , supérieure, si l'indice de 0 est différent de 1.

<u>Remarque</u>. Dans le cas où 0 <u>est valeur propre semi-simple</u>, au lieu d'employer les projections orthogonales P et P^* sur $N(L_{\lambda_o})$ et $N(L^*_{\lambda_o})$, on peut utiliser $P(\lambda_o)$, qui vérifie :

$$\forall u \in H, \qquad P^*u = 0 \iff P(\lambda_o)u = 0 ,$$

$$[\mathbb{1}-P(\lambda_o)](\mathbb{1}-P) = \mathbb{1} - P(\lambda_o) ,$$

$$[\mathbb{1}-P(\lambda_o)]\,\tilde{Q}\,[\mathbb{1}-P(\lambda_o)] = S = \lim_{\zeta\to 0} (\zeta-L_{\lambda_o})^{-1}[\mathbb{1}-P(\lambda_o)] .$$

<u>Démonstration</u> : Si $P^*u = 0$, alors $\forall v \in H$

$$(P(\lambda_o)u,v) = (u,P(\lambda_o^*)v) = 0 , \text{ puisque } u \perp N(L^*_{\lambda_o}) .$$

Si $P(\lambda_o)u = 0$, alors $\forall v \in N(L^*_{\lambda_o})$, on a

$$(u,v) = (u,P(\lambda_o^*)v) = (P(\lambda_o)u,v) = 0 \implies u \perp N(L^*_{\lambda_o}) .$$

Il en résulte que $P^*u = 0 \iff P(\lambda_o)u = 0$.

Cela entraîne $\mathbb{1}-P(\lambda_o) = (\mathbb{1}-P^*)[\mathbb{1}-P(\lambda_o)]$.

On montrerait de même que

$$Pu = 0 \leftrightarrow P^*(\lambda_o)u = 0 ,$$

ce qui entraîne $P[\mathbb{1}-P^*(\lambda_o)] = 0$, d'où en prenant l'adjoint :

$[\mathbb{1}-P(\lambda_o)]P = 0$ (P est autoadjoint), et

$$[\mathbb{1}-P(\lambda_o)]\,[\mathbb{1}-P] = \mathbb{1} - P(\lambda_o) .$$

Enfin, on a défini au chapitre 3, l'opérateur S tel que

$S = \lim_{\zeta\to 0} (\zeta-L_{\lambda_o})^{-1}[\mathbb{1}-P(\lambda_o)]$, qui vérifie donc

$$SL_{\lambda_o} \subset L_{\lambda_o}S = \mathbb{1} - P(\lambda_o) .$$

On obtient alors immédiatement, en remarquant que

$$[\mathbb{1}-P(\lambda_o)]\tilde{Q}[\mathbb{1}-P(\lambda_o)]L_{\lambda_o} = [\mathbb{1}-P(\lambda_o)]\tilde{Q}\,L_{\lambda_o} \subset \mathbb{1} - P(\lambda_o)$$

et $L_{\lambda_o}[\mathbb{1}-P(\lambda_o)]\tilde{Q}[\mathbb{1}-P(\lambda_o)] = [\mathbb{1}-P(\lambda_o)]L_{\lambda_o}\tilde{Q}(\mathbb{1}-P^*)[\mathbb{1}-P(\lambda_o)] = \mathbb{1}-P(\lambda_o)$,

que l'on a $S = [\mathbb{1}-P(\lambda_o)]\tilde{Q}[\mathbb{1}-P(\lambda_o)]$. ∎

Il en résulte que le système (11)-(12) peut être remplacé par le système (plus "naturel") :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (13) & P(\lambda_o)N_\lambda(\bar{u}+v) = 0 , \\ (14) & v = SN_\lambda(\bar{u}+v) , \\ & \text{où } \bar{u} = P(\lambda_o)u \text{ et } v = [\mathbb{1}-P(\lambda_o)]u . \end{array}}$$

III. Résolution dans le cas général.

1) Réduction à un système en dimension finie.

Que ce soit le système (7)-(8) ou le système (11)-(12), la méthode de résolution est la même : on commence par résoudre par rapport à v la deuxième équation, à l'aide du théorème des fonctions implicites, puis on reporte v dans la première équation, afin d'obtenir un système en dimension finie (m ou n). Si l'on suppose que la valeur propre 0 de L_{λ_o} est d'indice >1, on a en général intérêt à considérer le système (11)-(12), car l'équation de dimension finie associée n'a que la dimension n du sous-espace propre associé à 0.

Considérons donc l'équation (12), elle est de la forme $\mathcal{F}(v,\bar{u},\lambda) = 0$, où $\mathcal{F}$ est analytique par rapport à ses trois arguments, $\mathcal{F}(0,0,\lambda) = 0 \ \forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$,

$$D_1\mathcal{F}(0,0,\lambda) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n \ \tilde{Q}L^{(n)} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}) ,$$

et $D_1\mathcal{F}(0,0,\lambda)$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites du §.III,4) du chapitre 6, qui nous conduit à l'existence d'une solution unique $v = v(\bar{u},\lambda)$ dans un voisinage de $(0,\lambda_o)$ de $\mathcal{D}\times\mathbb{C}$, telle que

$$(1) \qquad v(\bar{u},\lambda) = \sum_{\substack{n+p=2 \\ p\geq 1}}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n \ \vartheta_n^{(p)}[\bar{u}^{(p)}] ,$$

avec $\vartheta_n^{(o)} = 0$, $\vartheta_o^{(1)} = 0$, $\vartheta_1^{(1)}[\bar{u}] = -\tilde{Q}\,L^{(1)}\bar{u}$,

$$\vartheta_o^{(2)}[\bar{u}^{(2)}] = \tilde{Q}M_o^{(2)}(\bar{u},\bar{u}) \text{ ,...}$$

où on a noté $\vartheta_n^{(p)}[\bar{u}^{(p)}] \equiv \vartheta_n^{(p)}[\bar{u},\ldots,\bar{u}]$ une application p-linéaire bornée de $\mathcal{D}^p$ dans $\mathcal{D}$, et où

$$(2) \qquad M_\lambda(u) = \sum_{\substack{p\geq 2\\ n+p\geq 2}}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, M_n^{(p)}[u^{(p)}] \text{ .}$$

Remplaçant v par $v(\bar{u},\lambda)$ dans (11) , on obtient ce qu'on appelle "l'équation de bifurcation" :

$$(3) \qquad P^* N_\lambda[\bar{u}+v(\bar{u},\lambda)] = 0 \text{ ,}$$

qui est donc un système de n équations pour $\bar{u}(\lambda)$ qui a n composantes dans $N(L_{\lambda_o})$. Il faut remarquer que $\bar{u} = 0$ est solution de (3) $\forall\, \lambda \in \vartheta(\lambda_o)$. Ceci était prévisible puisque $u = 0$ est solution de II.(4).

2) Résolution des cas usuels.

L'équation (3) se met sous la forme :

$$(4) \qquad -(\lambda-\lambda_o)P^*L^{(1)}\bar{u} + P^*M_o^{(2)}(\bar{u},\bar{u}) + R(\bar{u},\lambda) = 0 \text{ ,}$$

où $R(\bar{u},\lambda) = \sum_{\substack{n+p=3\\ p\geq 1}}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n\, R_n^{(p)}[\bar{u}^{(p)}]$.

Si l'on considère la "partie principale" de (4) ($\|\bar{u}\|$ et $|\lambda-\lambda_o|$ sont "petits")

$$-(\lambda-\lambda_o)P^*L^{(1)}\bar{u} + P^*M_o^{(2)}(\bar{u},\bar{u}) \text{ ,}$$

on remarque que si l'équation

$$(5) \qquad -P^*L^{(1)}w + P^*M_o^{(2)}(w,w) = 0$$

admet une solution non triviale w_o , alors $(\lambda-\lambda_o)w_o$ annulle la partie principale de (4). C'est pourquoi l'on pose :

$$\bar{u} = (\lambda-\lambda_o)w \text{ ,}$$

et (4) donne :

$$(6) \quad -P^*L^{(1)}w + P^*M_o^{(2)}(w,w) + \sum_{\substack{n+p=3 \\ p\geq 1}}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^{n+p-2} R_n^{(p)}[w^{(p)}] = 0 .$$

Cette équation est de la forme $\mathcal{F}(w,\lambda) = 0$ où $\mathcal{F}$ est analytique et $\mathcal{F}(w_o,\lambda_o) = 0$. D'où, si l'opérateur

$$(7) \qquad D_1\mathcal{F}(w_o,\lambda_o) \equiv -P^*L^{(1)} + 2P^*M_o^{(2)}(w_o,.) ,$$

qui est dans $\mathcal{L}[N(L_{\lambda_o});N(L^*_{\lambda_o})]$, est inversible, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites du §.III,4) du chapitre 6, pour conclure à l'existence de $\lambda \longrightarrow w(\lambda)$ solution de (6), analytique dans $\mathcal{V}(\lambda_o)$, telle que $w(\lambda_o) = w_o$.

Nous sommes alors en mesure d'énoncer :

<u>Théorème</u>. <u>Bifurcation dans le cas général</u>. <u>Soit à chercher</u> $u \neq 0$ <u>solution de</u> $L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0$ <u>dans</u> H , <u>où</u>

i) $\{L_\lambda\}_{\lambda\in D_o}$ <u>est une famille holomorphe de type (A), de domaine</u> $\mathcal{D}$, <u>à résolvante compacte dans</u> H ;

ii) $\exists\, \lambda_o \in D_o$ <u>tel que</u> 0 <u>soit valeur propre de</u> L_{λ_o} ;

iii) $(\lambda,u) \longrightarrow M_\lambda(u)$ <u>est analytique au voisinage de</u> $(\lambda_o,0)$ <u>de</u> $D_o \times \mathcal{D}$, <u>à valeurs dans</u> K , <u>et vérifie si</u> $\|u\|_{\mathcal{D}} \leq \delta_o$,

$$\exists\, \gamma>0 , \ \|M_\lambda(u)\|_K \leq \gamma \|u\|^2_{\mathcal{D}} , \ \lambda\in D_o .$$

<u>Alors, si l'équation</u>

$$(5) \qquad -P^*L^{(1)}w + P^*M_o^{(2)}(w,w) = 0$$

<u>a une solution</u> w_1 <u>non triviale dans</u> $N(L_{\lambda_o})$, <u>et si l'opérateur</u>

$$-P^*L^{(1)} + 2P^*M_o^{(2)}(w_1,.)$$

<u>est inversible, alors la bifurcation est</u> "<u>bilatère</u>" <u>et</u> $\exists$ <u>une solution</u> $u \neq 0$ <u>de</u> $L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0$, <u>analytique au voisinage de</u> λ_o , <u>qui vérifie</u>

$$u(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n w_n .$$

3) Diagramme de Newton.

Notons l'équation (4) sous la forme

$$\sum_{\substack{p\geqslant 1\\ n\geqslant 0\\ n+p\geqslant 2}}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n\, R_n^{(p)}[u^{(p)}] = 0 \,. \tag{8}$$

Si $P^*L^{(1)} (\equiv R_1^{(1)})$ ou $P^*M_0^{(2)} (\equiv R_0^{(2)})$ est identiquement nul sur $N(L_{\lambda_0})$, la partie principale de (8) n'est plus celle qui conduit à (5). Pour des raisons pratiques, nous sommes amenés à faire les hypothèses suivantes :

iv) si $\lambda \in \mathbb{R}$, L_λ et M_λ sont des opérateurs réels,

v) $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cap D_0$,

car on ne s'intéresse véritablement qu'aux solutions réelles de $L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0$.

Le premier problème est de chercher la partie principale de (8), pour appliquer une méthode analogue à celle du 2). Pour cela, on pose soit $\bar{u} = (\lambda-\lambda_0)^\alpha w(\lambda)$, soit $\bar{u} = (\lambda_0-\lambda)^\alpha w(\lambda)$ où $\alpha>0$ et w continue soit à droite soit à gauche (respectivement) en λ_0, et on cherche dans (8) à égaler deux* des différents exposants de $|\lambda-\lambda_0|$ de telle manière que tous les autres exposants soient supérieurs ou égaux à ceux-ci. Les α, solutions de ce premier problème, sont déterminés à l'aide du "diagramme de Newton" défini comme suit :

Les exposants de $|\lambda-\lambda_0|$ dans (8) sont de la forme $n + \alpha p$.

Une solution α devra vérifier :

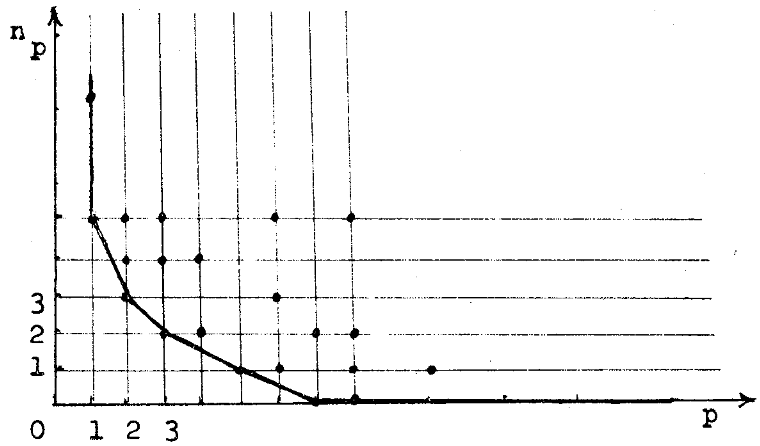
$$\exists\ p_0 \text{ et } q_0 ,\ n_{p_0} + \alpha p_0 = n_{q_0} + \alpha q_0 ,\quad \alpha>0 ,$$

et $\forall (p,n_p)$ intervenant dans (8) on a $n_p + \alpha p \geqslant n_{p_0} + \alpha p_0$.

On interprète ceci en considérant dans le plan (p,n) les points de coordonnées (p,n_p). Si on note $\vec{n} : (\alpha,1)$ le vecteur qui est orthogonal au segment joignant (p_0,n_{p_0}) à (q_0,n_{q_0}), alors $\forall M = (p,n_p)$ correspondant à un couple d'exposants de l'équation (4) on a $\overrightarrow{M_0M}.\vec{n}\geqslant 0$, c'est-à-dire que les points M sont tous d'un même côté (du côté de $\vec{n}$) de la droite passant par les points (p_0,n_{p_0}) et (q_0,n_{q_0}).

* cf. à l'Annexe 2, pourquoi l'on doit égaler au moins deux termes dans la partie principale de l'équation de bifurcation.

On obtient donc toutes les solutions α , si on considère l'enveloppe convexe de l'ensemble des points (p,n_p) du plan, et si on prend l'opposé de la pente (<0) de chaque segment appartenant à la frontière de cette enveloppe. On obtient évidemment $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$.



Exemples. - si $P^*L^{(1)} \not\equiv 0$, alors si on a $R_o^{(k)} \not\equiv 0$ et $R_o^{(p)} = 0$ pour $p=1,\dots,k-1$, on trouve $\alpha = 1/k-1$ (seule solution).

- si $P^*M_o^{(2)} \not\equiv 0$, alors si on a $R_\nu^{(1)} \not\equiv 0$ et $R_n^{(1)} \equiv 0$ pour $n = 1,\dots,\nu-1$, on trouve $\alpha = \nu$ (seule solution).

- si $P^*L^{(1)}$ et $P^*M_o^{(2)}$ sont $\equiv 0$, et si deux des coefficients $R_2^{(1)}$, $R_1^{(2)}$, $R_o^{(3)}$ ne sont pas identiquement nuls, alors $\alpha=1$ est solution (la seule si aucun n'est identiquement nul).

Supposons donc que l'on ait trouvé un $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ vérifiant les propriétés ci-dessus. De manière analogue à ce qu'on a fait pour obtenir (5), on considère tous les termes de l'équation (8) (en nombre fini) tels que $n_p+\alpha p$ soit égal au minimum β . On écrit ensuite la relation que doit vérifier $w(\lambda_o)$:

soit (9) $\displaystyle\sum_{n+\alpha p=\beta} R_n^{(p)}[w_o^{(p)}] = 0$ si $u(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)^\alpha w(\lambda)$,

soit (9') $\displaystyle\sum_{n+\alpha p=\beta} (-1)^n R_n^{(p)}[w_o^{(p)}] = 0$ si $u(\lambda) = (\lambda_o-\lambda)^\alpha w(\lambda)$.

Alors on trouve immédiatement par la méthode précédente, utilisant le théorème des fonctions implicites et la définition de α , que si $\exists\, w_o$ solution non triviale de (9) (ou $w_o' \neq 0$ solution de (9')) est si l'opérateur linéaire

$$\sum_{n+\alpha p=\beta} p\, R_n^{(p)} \underbrace{[w_o,\dots,w_o,\cdot]}_{(p-1)\text{-uple}} \quad \left(\text{resp. } \sum_{n+\alpha p=\beta} (-1)^n p\, R_n^{(p)} [w_o,\dots,w_o,\cdot]\right)$$

qui $\in \mathcal{L}[N(L_{\lambda_o});N(L^*_{\lambda_o})]$ est inversible, alors $\exists\ \lambda \longrightarrow u(\lambda)$ solution du problème, de la forme

$$(10) \qquad u(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)^{\alpha} \sum_{n=o}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^{n/d} w_n \ , \text{ où } \alpha = \frac{c}{d} \ ,$$

(resp. (10') avec $(\lambda_o-\lambda)$ à la place de $(\lambda-\lambda_o)$) .

<u>Remarque</u>. Si d est impair (dénominateur de α), la bifurcation est <u>bilatère</u> car $u(\lambda)$ est défini $\forall \lambda \in \vartheta(\lambda_o)$ (à gauche et à droite de λ_o

Si d est pair (c est alors impair), la bifurcation peut être unilatérale (elle l'est si la seule branche "bifurquée" est celle que l'on considère, ou si pour cet α il n'y a pas à la fois des solutions w_o de (9) et de (9')).

<u>Exemple</u>. On suppose $P^*L^{(1)} \not\equiv 0$, $P^*M_o^{(2)} \equiv 0$ et $R_o^{(3)} \not\equiv 0 \implies \alpha = 1/2$.
L'équation (9) donne :

$$(11) \qquad P^*L^{(1)}w + R_o^{(3)}(w,w,w) = 0 \ .$$

On suppose que $\exists\ w_o \neq 0$ solution de (11), il en résulte que $-w_o$ est aussi solution de (11). Si l'opérateur

$$P^*L^{(1)} + 3R_o^{(3)}(w_o,w_o,\cdot)$$

est inversible et s'il n'y a pas de solution non triviale de (9'), la bifurcation est unilatérale de la forme

$$\left\{\begin{aligned} u^+(\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^{n/2} w_n^+ \ , \quad w_1^+ = w_o \ , \\ u^-(\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^{n/2} w_n^- \ , \quad w_1^- = -w_o \ , \end{aligned}\right. \qquad \lambda \in \vartheta^+(\lambda_o)$$

pour les deux solutions qui correspondent à w_o et à $-w_o$.

IV. Cas particulier important.

Nous allons considérer le cas qui intervient le plus souvent dans la pratique, notamment en théorie de la stabilité hydrodynamique, à savoir, le cas où 0 est valeur propre simple de L_{λ_o}.

La décomposition associée à l'équation $L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0$, est maintenant (cf. (13)-(14)) :

$$(1) \qquad P(\lambda_o)\, N_\lambda(\bar{u}+v) = 0$$

$$(2) \qquad v = S\, N_\lambda(\bar{u}+v)$$

où $\bar{u} = P(\lambda_o)u = (u,w^{(o)})_H u^{(o)}$, $v = [\mathbb{1}-P(\lambda_o)]u$.

On a noté $u^{(o)}$ et $w^{(o)}$ les vecteurs tels que

$$(3) \qquad L_{\lambda_o} u^{(o)} = 0 \ , \ \|u^{(o)}\|_H = 1 \ , \ L^*_{\lambda_o} w^{(o)} = 0 \ , \ (u^{(o)},w^{(o)})_H = 1 \ .$$

Dans ce cas on peut se ramener à une équation de bifurcation scalaire. On note pour cela : $(u,w^{(o)})_H = a$, et en procédant comme au §.III, on arrive à l'équation de bifurcation :

$$\sum_{\substack{p\geq 1\\ n\geq o\\ n+p\geq 2}}^{\infty} \alpha_{np}(\lambda-\lambda_o)^n a^p = 0 \ ,$$

avec $\alpha_{11} = -(L^{(1)}u^{(o)},w^{(o)})_H = -\zeta^{(1)}$,

$\alpha_{o2} = (M_o^{(2)}(u^{(o)},u^{(o)}),w^{(o)})_H$,

$\alpha_{o3} = (M_o^{(3)}(u^{(o)},u^{(o)},u^{(o)}) + 2M_o^{(2)}[u^{(o)},SM_o^{(2)}(u^{(o)},u^{(o)})],w^{o})_H$

Remarque 1. On sait que pour $\lambda\in\vartheta(\lambda_o)$, $\exists$ une valeur propre simple ζ de L_λ, telle que $\zeta(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)} + O(\lambda-\lambda_o)^2$, où $\zeta^{(1)}$ est valeur propre de $P(\lambda_o)\, L^{(1)}\, P(\lambda_o)$, c'est-à-dire que $\zeta^{(1)} = (L^{(1)}u^{(o)},w^{(o)})_H$.

Remarque 2. On ne cherche dans la suite que des solutions réelles.

1) Résultats dans le cas $\zeta^{(1)} \neq 0$ (avec les hypothèses iv) et v)).

Notons que $a = 0$ est solution de (4), et correspond à la solution $u = \bar{u} = v = 0$. Il reste alors

(5) $$-(\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)} + \alpha_{o2}a + \sum_{\substack{n+p\geqslant 3\\ p\geqslant 1}} \alpha_{np}(\lambda-\lambda_o)^n a^{p-1} = 0 .$$

Si $\alpha_{o2} \neq 0$, on peut appliquer le théorème du §.III,2), et l'on a une bifurcation bilatère de la forme

(6) $$a(\lambda) = \frac{(\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}}{\alpha_{o2}} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(\lambda-\lambda_o)^n .$$

Si $\alpha_{o2} = 0$, on remarque, sur le diagramme de Newton, que le deuxième terme intervenant dans la partie principale de (5) provient de $\alpha_{ok}\ a^k (\not\equiv 0)$ où k est tel que $\alpha_{o2} = \dots = \alpha_{ok-1} = 0$.

Si k <u>est pair</u>, la bifurcation est <u>bilatère</u>, de la forme

(7) $$a(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)^{1/k-1} \left(\frac{\zeta^{(1)}}{\alpha_{ok}}\right)^{1/k-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(\lambda-\lambda_o)^{n/k-1} .$$

Si k <u>est impair</u>, la bifurcation est <u>unilatérale</u>, le côté dépendant du signe de $\frac{\zeta^{(1)}}{\alpha_{ok}}$, mais il y a deux branches :

(8) $$\begin{cases} a^+(\lambda) = \left|\frac{(\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}}{\alpha_{ok}}\right|^{1/k-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^+|\lambda-\lambda_o|^{n/k-1} , \\ a^-(\lambda) = -\left|\frac{(\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}}{\alpha_{ok}}\right|^{1/k-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^-|\lambda-\lambda_o|^{n/k-1} , \end{cases}$$

si $\zeta^{(1)}.\alpha_{ok} > 0 \implies \lambda \in \vartheta^+(\lambda_o)$,

si $\zeta^{(1)}.\alpha_{ok} < 0 \implies \lambda \in \vartheta^-(\lambda_o)$.

<u>N.B.</u> Un cas très courant en hydrodynamique est $\alpha_{o2} = 0$, $\zeta^{(1)}.\alpha_{o3} > 0$ pour la "première"bifurcation (correspondant au λ_o le plus petit, le paramètre λ étant bien choisi).

2) <u>Résultats dans le cas</u> $\zeta^{(1)} = 0$.

On doit considérer le diagramme de Newton associé à l'équation (4), en cherchant $a = |\lambda-\lambda_o|^{\alpha} b(\lambda)$. Une fois $\alpha>0$ déterminé comme vu au §.III,3), il faut trouver $b_o = b(\lambda_o) \neq 0$ et le côté de la bifurcation si elle est unilatérale. On aura donc $b_o \neq 0$ solution de

(9) $\displaystyle\sum_{n+\alpha p=\beta} \alpha_{np}\, b_o^p = 0$, où β est le minimum de $n + \alpha p$

(respectivement (9') $\displaystyle\sum_{n+\alpha p=\beta} (-1)^n\, \alpha_{np}\, b_o^p = 0$, pour une bifurcation avec $\lambda \in \vartheta^-(\lambda_o)$).

Enfin, pour résoudre le problème par le théorème des fonctions implicites, on doit avoir (cf. §.III.3)) :

$$\sum_{n+\alpha p=\beta} p\, \alpha_{np}\, b_o^{p-1} \neq 0$$

(respectivement $\displaystyle\sum_{n+\alpha p} (-1)^n\, p\alpha_{np}\, b_o^{p-1} \neq 0$)

c'est-à-dire b_o racine simple non nulle de (9) (respectivement (9')).

Remarque. Une condition suffisante pour que $\exists\, b_o \neq 0$ racine simple de (9) (respectivement (9')) est que l'on n'ait à égaler que deux termes dans (9) (respectivement (9')).

3) Exemple de calcul des branches bifurquées.

Reprenons l'exemple du §.I.1).n°3 :

$$\begin{cases} -u'' - \lambda u + u^3 + \dfrac{uu'^2}{\pi^2} = 0 , \\ u \in H^2(0,1) \cap H_o^1(0,1) = \mathcal{D} \quad , \ H = L^2(0,1) . \end{cases}$$

a) $\lambda_o = \pi^2$, $u^{(o)} = \sqrt{2}\sin \pi x = w^{(o)}$ (L_{λ_o} est autoadjoint)

$$\zeta^{(1)} = (L^{(1)}u^{(o)}, w^{(o)})_H = -(u^{(o)}, w^{(o)})_H = -1$$

$$M_\lambda u = -u^3 - \frac{uu'^2}{\pi^2} = M_o^{(3)}[u^{(3)}] ,$$

$$\Longrightarrow \alpha_{o2} = 0 , \ \alpha_{o3} = (M_o^{(3)}[u^{(o)(3)}], w^{(o)})_H = -4\int_o^1 \sin^2 \pi x\, dx = -2$$

$\zeta^{(1)}\alpha_{o3} > 0 \Longrightarrow \lambda \in \vartheta^+(\lambda_o)$ (bifurcation pour $\lambda > \lambda_o$) .

$$\Longrightarrow a^{\pm}(\lambda) = \pm\left(\frac{\lambda-\lambda_o}{2}\right)^{1/2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{\pm}(\lambda-\lambda_o)^{n/2} ,$$

d'où $\quad u^{\pm}(\lambda) = \pm\, (\lambda-\pi^2)^{1/2} \sin \pi x + O(\lambda-\pi^2)$.

③ $\lambda_o = k^2\pi^2$, $u^{(o)} = \sqrt{2}\sin k\pi x = w^{(o)}$, $\zeta_k^{(1)} = -1$, $\alpha_{o2} = 0$,

$$\alpha_{o3} = -4\int_o^1 \sin^2 k\pi x(1+(k^2-1)\cos^2 k\pi x)dx = -\frac{k^2+3}{2}$$

d'où $u_k^{\pm}(\lambda) = \pm(\lambda-k^2\pi^2)^{1/2}\dfrac{2}{\sqrt{k^2+3}}\sin k\pi x + O(\lambda-k^2\pi^2)$.

ⓒ On peut encore chercher des solutions bifurquées à partir d'une nouvelle solution comme $\mathcal{U}^+(\lambda) = (\lambda-\pi^2)^{1/2}\sin\pi x$. L'avantage, dans cet exemple est que l'on connait l'expression exacte de la branche $\mathcal{U}^+(\lambda)$, même pour $\lambda-\pi^2$ non voisin de 0 .
On pose $u = \mathcal{U}^+(\lambda) + v$, et on cherche les points de bifurcation pour le problème en v . On trouve, bien sûr, une bifurcation pour $\lambda = \pi^2$ qui doit donner $v = -\mathcal{U}^+(\lambda)$ (correspond à $u=0$) et $v = -\mathcal{U}^+(\lambda) + \mathcal{U}^-(\lambda)$ (correspond à $\mathcal{U}^-(\lambda)$ pour u) pour $\lambda \geq \lambda_o$. Il se pourrait que l'on trouve d'autre points de bifurcation.

Ici, le nouvel opérateur linéaire L'_μ est de la forme :
$(\mu = (\lambda-\pi^2)^{1/2})$

$$L'_\mu v = -v'' - \pi^2 v + 2\mu^2\{\sin^2\pi x\, v + \frac{\sin\pi x.\cos\pi x}{\pi}v'\},$$

où $v\in\mathcal{D}$. On peut montrer (en posant $v(x) = \cos\pi x.w(x)$, on se ramène au 1er ordre) que la seule valeur réelle de μ donnant une bifurcation est $\mu = 0$.

Avec les notations du 2) on a ici : $\mu_o = 0$,

$$L'^{(1)} \equiv 0 \text{ , } L'^{(2)}v = 2\sin^2\pi x\, v + \frac{\sin 2\pi x}{\pi}v'$$

$$u^{(o)} = w^{(o)} = \sqrt{2}\sin\pi x \text{ ,}$$

d'où $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{21} = -2 (= -(L'^{(2)}u^{(o)},w^{(o)})_H)$.

Puis, on remarque que $M_o'^{(2)} \equiv 0$

$$M_o'^{(3)}[v^{(3)}] = -\{v^3 + \frac{vv'^2}{\pi^2}\} \text{ ,}$$

$$M_1'^{(2)}[v^{(2)}] = -\{\sin\pi x(3v^2 + \frac{v'^2}{\pi^2}) + \frac{2\cos\pi x}{\pi}v\,v'\} \text{ ,}$$

d'où $\alpha_{o2} = 0$, $\alpha_{o3} = -2$, $\alpha_{12} = (M_1'^{(2)}(u^{(o)},u^{(o)}),w^{(o)})_H = -3\sqrt{2}$.

Le diagramme de Newton donne $\alpha = 1$ et

$$-2-3\sqrt{2}\,b_o-2b_o^2=0 \implies b_o=-\sqrt{2} \text{ ou } -1/\sqrt{2}\,,$$

et l'on obtient bien $-\mathcal{U}^+(\lambda)$ et $-\mathcal{U}^+(\lambda)+\mathcal{U}^-(\lambda)$.

Bibliographie.

[1] M.A. KRASNOSEL'SKII : Topological methods in the theory of non-linear integral equations, Pergamon Press, Oxford, 1964.

[2] S. STEINBERG : Meromorphic families of compact operators ; Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.31, n°5, 1968, p.372-379.

[3] M.M. VAINBERG et V.A. TRENOGIN : Méthodes de Liapounov et Schmidt dans la théorie des équations non linéaires, Uspeki Mat. Nauk, Vol.17, n°2 (104), 1962, p.13-75 (en russe).

Bibliographie complémentaire pour des résultats généraux.

- M.M. VAINBERG et V.A. TRENOGIN : Théorie de la bifurcation des solutions des équations non linéaires, Editions Nauka - Moscou, 1969 (en Russe).
- G.H. PIMBLEY, Jr. : Eigenfunction Branches of Nonlinear Operators, and their Bifurcations, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New-York, 1969.
- P.H. RABINOWITZ : Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems, Journal of Functional Analysis, Vol.7, n°3, 1971, p.487-513.

-:-:-:-

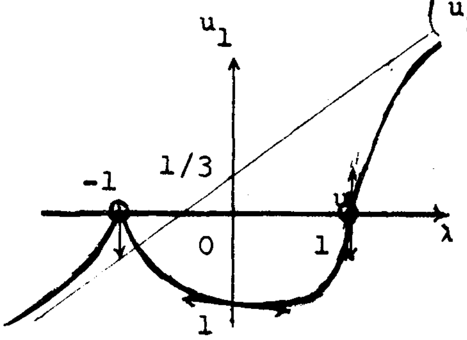
Annexe 1.

a) - Exemple de deux branches bifurquées se "raccordant" (G. TRONEL).

$$(1-\lambda)u_1+u_2^2 = 0$$
$$(1+\lambda)u_2+u_1^2 = 0 \longrightarrow$$ bifurcations en $\lambda = \pm 1$ (valeurs propres simples

solution triviale : $u_1 = u_2 = 0$.

solution bifurquée : $\begin{cases} u_1 = (\lambda-1)^{1/3}(1+\lambda)^{2/3} \\ u_2 = -(1+\lambda)^{1/3}(\lambda-1)^{2/3} \end{cases}$.



On note que les branches bifurquées en +1 et -1 se raccordent en une même branche.

b) - Exemple de bifurcation secondaire (G. TRONEL).

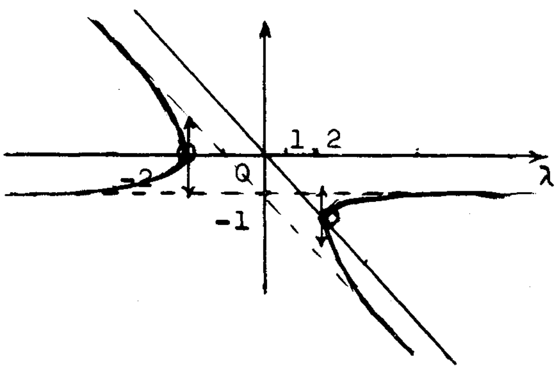
$$\begin{cases} (1+\lambda)u_1-u_2+u_1^2 = 0 \\ (1+\lambda)u_2-u_1+u_2^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ bifurcations en $\lambda=0$ et $\lambda=-2$ (simples).

. solution triviale : $u_1 = u_2 = 0$.

. solution bifurquée en 0 : $u_1 = u_2 = -\lambda$.

. solutions bifurquées en -2 : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{-(\lambda+2)\mp\sqrt{\lambda^2-4}}{2} \\ u_2 = \dfrac{-(\lambda+2)\pm\sqrt{\lambda^2-4}}{2} \end{cases}$ pour $\lambda \leq -2$.

. bifurcation secondaire (sur la branche bifurquée en 0) en $\lambda=+2$.



pour $\lambda \geq +2$ $\begin{cases} u_1 = \dfrac{-(\lambda+2)\mp\sqrt{\lambda^2-4}}{2} , \\ u_2 = \dfrac{-(\lambda+2)\pm\sqrt{\lambda^2-4}}{2} . \end{cases}$

Annexe 2.

Pourquoi doit-on égaler au moins deux termes dans la partie principale de l'équation de bifurcation ?

Soit $(\lambda-\lambda_o)^{n_o+\alpha p_o} R_{n_o}^{(p_o)} [w_o^{(p_o)}]$ le terme principal (α étant fixé), s'il n'y en a qu'un, de l'équation de bifurcation, où l'on a remplacé $\overline{u}(\lambda)$ par $(\lambda-\lambda_o)^\alpha w_o$, $w_o \neq 0$.

Comme l'on veut employer le théorème des fonctions implicites, il faut d'abord trouver $w_o \neq 0$ solution de

$$(1) \qquad R_{n_o}^{(p_o)} [w_o^{(p_o)}] = 0 .$$

On remarque déjà qu'en dimension 1 , ce n'est pas possible.

En dimension supérieure à 1 , si $w_o \neq 0$ est solution de (1), il faut encore vérifier que la dérivée de Fréchet par rapport à w , au point (w_o,λ_o) est inversible (dimension finie). Or cette dérivée vaut :

$$(2) \qquad p_o R_{n_o}^{(p_o)} [w_o^{(p_o-1)},.] = A$$

et l'on remarque que $Aw_o = 0$, d'après (1). A n'est donc pas injectif, donc non inversible de $N(L_{\lambda_o}^*)$ dans $N(L_{\lambda_o})$.

IX - Stabilité des solutions stationnaires.

-:-:-:-

Stabilité des solutions stationnaires.

I. Formulation du problème.

1) Introduction.

Nous avons vu au chapitre VIII. que l'équation

(1) $\quad L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0 \;,\; u \in \mathcal{D}$

où L_λ et M_λ satisfont des conditions adéquates, peut admettre à partir d'une "valeur critique" λ_o, de λ, une solution non nulle "bifurquant" à partir de 0.

Nous allons maintenant considérer le problème d'évolution

$$(2) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0 \;,\; u \in C^o(o,\infty;\mathcal{D}) \cap C^1(o,\infty;H), \\ u(o) = u_o \in \mathcal{D} \;, \end{cases}$$

pour lequel l'existence d'une solution sur $[0,T]$ a été montrée au chapitre VII. , et nous allons étudier le comportement de la solution quand $t \longrightarrow \infty$. Nous avons vu au théorème 2 que si tout le spectre de L_λ est du côté des réels > 0, alors pour $\|u_o\|$ assez petit, il existe u unique solution de (2), et $u(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ exponentiellement. Nous avons vu au théorème 3 que si une partie du spectre de L_λ est du côté des réels < 0, la solution stationnaire u =0 (solution de (1)) est instable. Mais nous avons vu dans certaines conditions, que pour un choix convenable de u_o, on a encore $u(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ exponentiellement. Le problème est alors de savoir ce que devient u(t) pour u_o"non convenable". En réalité on ne pourra pas répondre à la question en général, néanmoins on pourra préciser pour certains u_o "non convenables" que la solution u(t) tend, quand $t \longrightarrow \infty$, vers une solution stationnaire non nulle de (1). En fait, on montrera dans quelles conditions les solutions "bifurquées" de (1) sont stables, au sens défini au chapitre VII.

2) Définition du λ_o critique. Hypothèses générales.

Dorénavant, pour le terme linéaire de (2), nous nous placerons dans les hypothèses suivantes :

<u>H.1.</u> $\{L_\lambda\}_{\lambda \in D_o}$ <u>est une famille holomorphe de type</u> (A), <u>de domaine</u> $\mathcal{D}$, <u>à résolvante compacte dans</u> H. L_λ <u>est m-sectoriel, de sommet</u> $-\gamma_\lambda \in \mathbb{R}$, <u>de demi-angle</u> $\theta_\lambda \in [o,\frac{\pi}{2}[$. <u>De plus,</u> L_λ <u>est réel si</u> $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notons $\xi_o(\lambda) = \inf \mathcal{R}e\{\sigma(L_\lambda)\}$, nous sommes alors amenés à définir un "λ_o critique" :

<u>H.2.</u> $\exists\, \lambda_o \in \mathbb{R}$, $\exists$ <u>un voisinage à gauche</u> $\mathcal{V}^-(\lambda_o)$ <u>et un voisinage à droite</u> $\mathcal{V}^+(\lambda_o)$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$, <u>tels que</u>

$$\xi_o(\lambda_o) = 0 \ , \ \lambda \in \mathcal{V}^-(\lambda_o)-\{\lambda_o\} \Rightarrow \xi_o(\lambda) > 0 \ ,$$

$$\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)-\{\lambda_o\} \Rightarrow \xi_o(\lambda) < 0 .$$

Une conséquence de ces deux hypothèses est que, pour $\lambda \in \mathcal{V}^-(\lambda_o)-\{\lambda_o\}$, d'après le corollaire du théorème 2 du chapitre VII, on a stabilité de la solution nulle, alors que pour $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)-\{\lambda_o\}$, celle-ci est instable d'après le théorème 3 (ch. VII.).

Il résulte aussi de H.2 que pour $\lambda=\lambda_o$, $\exists$ certaines valeurs propres de L_{λ_o}, qui sont de parties réelles nulles, les autres valeurs propres, qui constituent le reste du spectre d'après H.1, sont de parties réelles positives. Nous devons alors remarquer, vu ce que nous avons étudié au chapitre VIII. , que si nous désirons avoir une bifurcation pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$, nous devons supposer que 0 est valeur propre de L_{λ_o}.

C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse suivante :

<u>H.3.</u> <u>Seul</u> $0 \in \sigma(L_{\lambda_o}) \cap \{\zeta \in \mathbb{C} ; \mathrm{Re}\ \zeta=0\}$.

Nous savons alors que l'indice et la multiplicité m de 0 sont finis, d'ailleurs nous serons amenés plus loin à faire des hypothèses plus précises sur ceux-ci.

Pour être dans les conditions susceptibles de nous fournir une bifurcation en λ_o, il reste à formuler les hypothèses sur le terme non linéaire :

<u>H.4.</u> $\exists$ <u>un espace de Hilbert</u> K <u>tel que</u> $\mathcal{D} \hookrightarrow K \hookrightarrow H$, <u>et tel que</u> $(\lambda,u) \longrightarrow M_\lambda(u)$ <u>soit analytique au voisinage de</u> $(\lambda_o,0)$, <u>de</u> $D_o \times \mathcal{D}$, <u>à valeurs dans</u> K, <u>et vérifie</u> :

$\exists\, \delta_o > 0$ <u>tel que</u> $\forall \lambda \in D_o$ <u>on ait</u> $\|M_\lambda(u)\|_K \leqslant \gamma \|u\|^2_{\mathcal{D}}$, <u>pour tout</u> u <u>vérifiant</u> $\|u\|_{\mathcal{D}} \leqslant \delta_o$.

Remarque 1. Il n'est pas nécessaire ici de supposer que M_λ transforme un borné de $\mathcal{D}$ en un borné de K, puisque dans la suite nous raisonnerons sur des $\|u\|_{\mathcal{D}}$ petits.

Remarque 2. Nous sommes obligés d'utiliser un espace K strictement inclus dans H puisque nous emploierons des théorèmes du chapitre VII (contrairement à ce que nous avons vu au chapitre VIII où $M_\lambda(u)$ peut être simplement à valeurs dans H).

Il nous faut préciser les hypothèses sur K, afin de pouvoir appliquer ce que nous avons fait au chapitre VII.

H.5. $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$, $\exists$ une constante $C > 0$ telle que, $T > 0$ étant fixé,

$$\|e^{-L_\lambda t}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq \frac{C}{t^\alpha}, \text{ avec } \alpha \in [0,1[\,,\ t \in]0,T].$$

A ce sujet, il est utile de savoir pour un problème donné, si H.5 est vérifiée, à cette fin le lemme de perturbation suivant peut être utilisé :

Lemme 1.

Soit $L \in \mathcal{F}(H)$, de domaine dense $\mathcal{D}$, tel que $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ vérifiant :

(3) $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists M_\varepsilon > 0,\ \|(L+\zeta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \dfrac{M_\varepsilon}{|\zeta-\gamma|}, \quad |\arg(\zeta-\gamma)| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon.$

Soit aussi un opérateur linéaire A tel que l'on ait :

soit (4) $\|Au\|_K \leq C(\|u\|_H+\|Lu\|_H) \quad \forall u \in \mathcal{D}$, où $\mathcal{D} \subsetneq K \subsetneq H$,

soit (4') $\|Au\|_H \leq a(\|u\|_H+\|Lu\|_H) \quad \forall u \in \mathcal{D}$.

Si $\exists M_0 > 0$ et $\delta_0 > 0$ tels que

(5) $\quad \|(1+\varepsilon L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq M_0 \varepsilon^{-\alpha}, \quad \alpha \in [0,1[\,,\ \varepsilon \in]0,\delta_0]$,

alors si (4) est vérifiée (resp. si (4') est vérifiée, $\exists \eta > 0$ tel que $a \leq \eta$ entraîne)

$\exists M_1 > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que

(6) $\quad \|[\mathbb{1}+\varepsilon(L+A)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq M_1 \varepsilon^{-\alpha}, \quad \alpha \in [0,1[\,,\ \varepsilon \in]0,\delta_1]$.

Démonstration. Si (4) est vérifiée on a $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D};K)} \leq C\sqrt{2}$, si c'est (4') qui est vérifiée, on a $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D};H)} \leq a\sqrt{2}$. Majorons la norme de l'opérateur $(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}\varepsilon A$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{D})$.

$$\|(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}\varepsilon A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D})} \leq \varepsilon\|(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})}\cdot\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D};H)} ,$$

$$\text{ou} \quad \leq \varepsilon\|(1+\varepsilon L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})}\cdot\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D};K)} .$$

Si (4) est vérifiée, d'après (5) on obtient :

$$\|(1+\varepsilon L)^{-1}\varepsilon A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D})} \leq M_o\varepsilon^{1-\alpha}C\sqrt{2} ,$$

et il est évident que pour δ_1 assez petit, si $\varepsilon \leq \delta_1$, la quantité $M_o\varepsilon^{1-\alpha}C\sqrt{2}$ peut être rendue $\leq \frac{1}{2}$.

Si (4') est vérifiée, il nous faut estimer $\|(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})}$. Mais, d'après (3) on a pour δ_1 bien choisi, $\exists\, M > 0$ tel que

$$\|(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M \text{ pour } o<\varepsilon\leq\delta_1 .$$

Onutilise alors l'identité $\varepsilon L(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1} = \mathbb{1}-(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}$, pour obtenir

$$\|(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})} \leq \frac{M'}{\varepsilon} .$$

Il en résulte pour $\eta = 1/\, 2\sqrt{2}M'$, que si $a \leq \eta$ alors

$$\|(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}\varepsilon A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D})} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{comme dans le premier cas.}$$

Or, on a l'identité suivante

$$[\mathbb{1}+\varepsilon(L+A)]^{-1} = [\mathbb{1}+\varepsilon(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1}A]^{-1}(\mathbb{1}+\varepsilon L)^{-1},$$

et celle-ci fournit la majoration cherchée (dans les deux cas) :

$$\|[\mathbb{1}+\varepsilon(L+A)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq 2\, M_o\varepsilon^{-\alpha} \text{ pour } \varepsilon\in\,]0,\delta_1] . \blacksquare$$

Enonçons alors :

<u>Corollaire</u>. <u>Avec les hypothèses du Lemme 1</u> $-(L+A)$ <u>est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe et</u> $\exists\, C > 0$ <u>tel que</u>

$$\|e^{-(L+A)t}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leq \frac{C}{t^\alpha} \quad , t\in\,]0,T] .$$

<u>Démonstration</u> : La condition (3) implique que $-L$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe dans H. D'autre part, on sait que si (4') est vérifiée pour a assez petit (§ III du chapitre V), alors $-(L+A)$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe. Dans le cas où c'est (4) qui est vérifiée, on sait d'après le lemme 1 du chapitre VII que $\forall\varepsilon$, $\exists\, K_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|(L+\zeta)^{-1}A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D})} \leq \frac{K_\varepsilon}{|\zeta-\gamma|^{1-\alpha}}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D};K)} \quad , \ |\arg(\zeta-\gamma)| \leq \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon .$$

D'où, pour $|\zeta-\gamma|$ assez grand on a

$$\|[\mathbb{1}+(L+\zeta)^{-1}A]^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D})} \leqslant 2 \ .$$

Il en résulte que

$$\|(L+A+\zeta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})} \leqslant 2\|(L+\zeta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{D})} \leqslant M'_\varepsilon \quad \text{pour } |\zeta-\gamma| \geqslant \delta .$$

Or, l'identité

$$(L+A+\zeta)^{-1} = \zeta^{-1}\,\mathbb{1}-\zeta^{-1}(L+A)(L+A+\zeta)^{-1} \ ,$$

nous permet d'obtenir

$$\|(L+A+\zeta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{M''_\varepsilon}{|\zeta|} \quad \text{pour } |\zeta-\gamma| \geqslant \delta \ , \ \zeta \neq 0 \text{ et } |\arg(\zeta-\gamma)| \leqslant \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon \ .$$

On peut évidemment remplacer le second membre de cette inégalité par $\frac{M'''_\varepsilon}{|\zeta-\gamma|}$ pour $|\zeta-\gamma| \geqslant \delta'$ et M'''_ε bien choisi.

Il en résulte, encore dans ce cas, que $-(L+A)$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe.

Il nous reste à utiliser le lemme de l'annexe 2 du chapitre VII, équivalent au lemme 1 du même chapitre, qui nous dit que dès que l'on a (6), on sait que $\exists\, C > 0$ telle que

$$\|e^{-(L+A)t}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leqslant \frac{C}{t^\alpha} \ , \quad t \in]0,T] \ . \ \blacksquare$$

Remarque. Il résulte du Corollaire que si pour $\lambda=\lambda_0$, l'hypothèse H.5 est vérifiée, alors $\exists$ un voisinage $\mathcal{V}(\lambda_0)$ tel que $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$, H.5 est encore vérifiée.

II. Stabilité linéaire.

1) Généralités.

Nous avons vu au chapitre VIII qu'en général la solution "bifurquée" $\mathcal{U}(\lambda)$ dépend analytiquement de $\varepsilon = |\lambda-\lambda_0|^{1/d}$, et peut n'être définie que pour $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_0)$ ou pour $\lambda \in \mathcal{V}^-(\lambda_0)$. Pour étudier la stabilité de cette solution il est naturel de poser :

$$u = \mathcal{U}(\lambda) + v$$

et de considérer, dans une première étape, le problème linéarisé, c'est à dire l'évolution, quand $t \longrightarrow \infty$, de la solution du problème suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + L_\lambda v - D\,M_\lambda(\mathcal{U}(\lambda)).v = 0, \\ v(0) = v_o \in \mathcal{D} \quad , \ t \longrightarrow v(t) \text{ continue dans } \mathcal{D} \text{ pour } t \geqslant 0, \\ \text{et continûment dérivable dans H pour } t > 0. \end{cases}$$

On veut montrer que l'opérateur linéaire

$$-L'_\varepsilon = -L_\lambda + D\,M_\lambda(\mathcal{U}(\lambda))$$

est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe dans H, pour ε petit. Pour cela on remarque que le domaine est toujours $\mathcal{D}$, puisque $D\,M_\lambda(\mathcal{U}(\lambda)) \in \mathcal{L}(\mathcal{D};K) \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{D};H)$. D'autre part, comme $\exists\, \theta > 0$ tel que $\|\mathcal{U}(\lambda)\|_{\mathcal{D}} \leqslant C|\lambda-\lambda_o|^\theta$ (cf. chapitreVIII), alors d'après l'analyticité de M_λ et son comportement au voisinage de 0, $\exists\, \gamma_1$ tel que

$$(2)\qquad \|D\,M_\lambda(\mathcal{U}(\lambda))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D};H)} \leqslant \gamma_1 |\lambda-\lambda_o|^\theta \;,$$

pour $|\lambda-\lambda_o|$ assez petit. Nous sommes alors dans les conditions d'application du Lemme du § III du chapitre V, qui affirme que pour $|\lambda-\lambda_o|$ assez petit, $-L'_\varepsilon$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe.

En fait, si on prend $\varepsilon = (\lambda-\lambda_o)^{1/d}$ (resp. $(\lambda_o-\lambda)^{1/d}$) comme nouveau paramètre quand $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ (resp. $\lambda \in \mathcal{V}^-(\lambda_o)$), à cause de l'analyticité en ε de $\mathcal{U}(\lambda)$, L'_ε est alors <u>une famille holomorphe de type (A), pour $\varepsilon \in \mathcal{V}(o)$</u> (définie même pour ε complexe). De plus, L'_ε est <u>à résolvante compacte</u>, comme on le verrait immédiatement grâce à la démonstration du Lemme du chapitre V (il suffit de le montrer pour un ζ particulier).

Or, pour $\varepsilon = 0$, on a $L'_o \equiv L_{\lambda_o}$ dont le spectre est constitué par la valeur propre 0 de multiplicité m, et d'autres valeurs propres de parties réelles > 0. Il en résulte que pour $\varepsilon \in \mathcal{V}(0)$, les valeurs propres qui seront de parties réelles < 0 ne proviendront que de la perturbation de la valeur propre nulle. D'où, le comportement quand $t \longrightarrow \infty$ de la solution du problème linéarisé (1), sera lié aux parties réelles de ces valeurs propres.

Si elles sont toutes de parties réelles > 0, alors $v(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ exponentiellement $\forall\, v_o \in \mathcal{D}$.

Si $\exists$ une valeur propre de partie réelle < 0, alors $\exists\, v_o \in \mathcal{D}$ tel que $\|v(t)\|_{\mathcal{D}}$ ne soit pas borné quand $t \longrightarrow \infty$ (il suffit de le choisir dans le sous-espace propre relatif à cette valeur propre).

Comme nous ne pouvons préciser davantage dans le cas général, il est utile, pour continuer, de faire des hypothèses supplémentaires.

2) Cas où 0 est valeur propre semi-simple de L_{λ_o} et $\mathcal{U}$ analytique.

Nous faisons dans ce paragraphe les hypothèses supplémentaires suivantes :

H'.1. 0 est valeur propre semi-simple de L_{λ_o}.

H'.2. $\exists$ une solution bifurquée de la forme

$$\mathcal{U}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_o)^n w_n ,$$

où $w_1 \in N(L_{\lambda_o})$ est solution non nulle de

$$-P(\lambda_o)L^{(1)}w + P(\lambda_o)M_o^{(2)}(w,w) = 0 ,$$

et l'opérateur $-P(\lambda_o)L^{(1)}P(\lambda_o) + 2P(\lambda_o)M_o^{(2)}[w_1, P(\lambda_o)\ .]$

est inversible dans $N(L_{\lambda_o})$.

On a donc maintenant $\varepsilon = \lambda-\lambda_o$ et nous savons, grâce à H'.1 que les valeurs propres voisines de 0 de L'_ε sont d'ordre $\lambda-\lambda_o$. Nous avons vu qu'il s'agit de chercher d'abord les valeurs propres de l'opérateur $P(\lambda_o)L'^{(1)}P(\lambda_o)$ où $L'^{(1)}$ est défini par $L'_\varepsilon = L_{\lambda_o} + \varepsilon L'^{(1)} + \ldots$. Or, pour $\|u\|_{\mathcal{D}} < \delta_o$, on a $M_\lambda(u) = \sum_{n>o,p>2}^{\infty}(\lambda-\lambda_o)^n M_n^{(p)}[u^{(p)}]$,

d'où $$DM_\lambda(\mathcal{U}(\lambda)) = \sum_{n>o,p>2}^{\infty} p(\lambda-\lambda_o)^n M_n^{(p)}[(\mathcal{U}(\lambda))^{(p-1)}, .]$$

$$= 2(\lambda-\lambda_o)M_o^{(2)}(w_1, .) + O(\lambda-\lambda_o)^2 \quad \text{dans } \mathcal{L}(\mathcal{D};K).$$

Il vient :

(3) $$P(\lambda_o)L'^{(1)}P(\lambda_o) = P(\lambda_o)L^{(1)}P(\lambda_o) - 2P(\lambda_o)M_o^{(2)}[w_1, P(\lambda_o)\ .].$$

Mais nous savons d'après H'.2 que cet opérateur n'a que des valeurs $\zeta_i^{(o)} \neq 0$, $i = 1,\ldots,k \leqslant m$ (multiplicité de 0). Considérons le cas où $\mathrm{Re}\,\zeta_i^{(o)} > 0\ \forall i$, on sait alors que pour $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)-\{\lambda_o\}$, toutes les valeurs propres de L'_ε sont de parties réelles > 0 (elles sont de la forme $(\lambda-\lambda_o)\zeta_i^{(o)} + O(\lambda-\lambda_o)$ et $\lambda-\lambda_o > 0$). De même, pour $\lambda \in \mathcal{V}^-(\lambda_o)-\{\lambda_o\}$, elles sont de parties réelles < 0. Il en résulte dans ce cas, comme nous le verrons au § III, que la solution bifurquée $\mathcal{U}(\lambda)$ est stable pour $\lambda > \lambda_o$ et instable pour $\lambda < \lambda_o$ (on utilise le théorème 2 du chapitre VII).

En revanche, si l'on considère le cas où $\exists\, i \neq j$ tels que $\mathrm{Re}\,\zeta_i^{(o)} > 0$ et $\mathrm{Re}\,\zeta_j^{(o)} < 0$, alors, pour $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o) - \{\lambda_o\}$ et pour $\lambda \in \mathcal{V}^-(\lambda_o) - \{\lambda_o\}$

il existe au moins une valeur propre de partie réelle < 0. Il en résulte dans ce cas que $u(\lambda)$ est instable des deux côtés de λ_o.

<u>Remarque</u>. Si $\frac{d\xi_o}{d\lambda}(\lambda_o) \neq 0$, alors, on sait que l'opérateur $P(\lambda_o)L^{(1)}P(\lambda_o)$ admet au moins une valeur propre de partie réelle < 0 (correspondant à l'instabilité de la solution nulle pour $\lambda > \lambda_o$). Ceci <u>n'implique évidemment pas</u> le même résultat pour l'opérateur $P(\lambda_o)L'^{(1)}P(\lambda_o)$, comme nous le verrons au 3).

3) <u>Cas où 0 est valeur propre simple de</u> L_{λ_o} <u>et</u> $\frac{d\xi_o}{d\lambda}(\lambda_o) \neq 0$.

Nous faisons dans ce paragraphe les hypothèses supplémentaires suivantes :

<u>H'.3</u>. <u>0 est valeur propre simple de</u> L_{λ_o}.

<u>H'.4</u>. $\frac{d\xi_o}{d\lambda}(\lambda_o) \neq 0$.

L'hypothèse H'.3 implique pour L_λ l'existence d'une valeur propre simple $\lambda \longrightarrow \zeta(\lambda)$ analytique, telle que

$$\zeta(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)} + O(\lambda-\lambda_o)^2.$$

Or, ici $\xi_o(\lambda) = \text{Re}\ \zeta(\lambda) = \zeta(\lambda)$, puisque $\zeta(\lambda)$ est réelle à cause de la réalité de L_λ (λ réel, cf. H.1). En fait si $\zeta(\lambda)$ n'était pas réel il existerait une valeur propre $\bar{\zeta}(\lambda)$ conjuguée, aussi voisine de 0, ce qui est impossible, à cause de la multiplicité 1 de 0 (H'.3).
Il en résulte, d'après H'.4 que $\zeta^{(1)} \neq 0$ et, d'après H.2, $\underline{\zeta^{(1)} < 0}$.

On peut donc appliquer les résultats du § IV. 1) du chapitre VIII, c'est à dire que si $\alpha_{ok} \neq 0$, $\alpha_{o2} = \dots = \alpha_{ok-1} = 0$ dans l'équation de bifurcation (5) du §IV du chapitre VIII, alors

si k est pair on prend $\varepsilon = (\lambda-\lambda_o)^{1/k-1}$,

si k est impair on prend $\begin{cases} \varepsilon = (\lambda-\lambda_o)^{1/k-1} & \text{si } \alpha_{ok} < 0, \\ \varepsilon = (\lambda_o-\lambda)^{1/k-1} & \text{si } \alpha_{ok} > 0. \end{cases}$

a) - <u>$k=2$, $\varepsilon=\lambda-\lambda_o$</u>

C'est un cas particulier du 2) , où l'on peut immédiatement donner complètement le résultat. On sait déjà, que

$$P(\lambda_o)L^{(1)}P(\lambda_o) = \zeta^{(1)}P(\lambda_o)$$

$$P(\lambda_o)M_o^{(2)}(u^{(o)},u^{(o)}) = \alpha_{o2}u^{(o)} \quad , \text{ où } L_{\lambda_o}u^{(o)} = 0, \ \|u^{(o)}\|_H = 1.$$

D'autre part, si on écrit

$$\mathcal{U}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_o)^n w_n ,$$

on a $w_1 = b_1 u^{(o)}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$ est solution non nulle de

$$-\zeta^{(1)} + \alpha_{o2} b_1 = 0 \quad \text{(cf. chapitre VIII).}$$

Il en résulte que

$$P(\lambda_o) M_o^{(2)} [w_1, P(\lambda_o) \,.] = b_1 \alpha_{o2} P(\lambda_o) = \zeta^{(1)} P(\lambda_o),$$

donc, d'après (3) :

$$P(\lambda_o) L'^{(1)} P(\lambda_o) = \zeta^{(1)} P(\lambda_o) - 2\zeta^{(1)} P(\lambda_o) = -\zeta^{(1)} P(\lambda_o).$$

Comme $\zeta^{(1)} < 0$, la valeur propre de l'opérateur (3) (qui opère en dimension 1) est <u>positive</u>, d'où, pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$,

$\Rightarrow$ si $\lambda > \lambda_o$ toutes les valeurs propres de L'_ε sont de parties réelles > 0

$\Rightarrow$ si $\lambda < \lambda_o$, $\exists$ une valeur propre négative d'ordre $(\lambda-\lambda_o)$.

A l'aide du § III, on pourra conclure que $\mathcal{U}(\lambda)$ est <u>stable pour $\lambda > \lambda_o$</u> et <u>instable pour $\lambda < \lambda_o$</u> (contrairement à la solution nulle).

b) - <u>$k > 2$, $\varepsilon = (\lambda-\lambda_o)^{1/k-1}$, k pair ou impair.</u>

On peut alors écrire

$\mathcal{U}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n w_n$, où $w_1 = b_1 u^{(o)}$ et b_1 solution non nulle de

$$-\zeta^{(1)} + \alpha_{ok} b_1^{k-1} = 0 \quad \text{(cf. chapitre VIII).}$$

On va calculer directement le premier terme non nul du développement de la valeur propre $\zeta'(\varepsilon)$ de L'_ε qui est de la forme :

$$\zeta'(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \zeta'^{(n)} \quad (\zeta'(0) = 0).$$

Pour cela, remarquons que l'on a l'identité suivante pour $\varepsilon \in \mathcal{V}(0)$, où l'on note $\vartheta(\varepsilon) \equiv \mathcal{U}(\lambda)$:

(4) $\qquad L_\lambda \vartheta(\varepsilon) - M_\lambda(\vartheta(\varepsilon)) \equiv 0.$

En remarquant que $\frac{dL_\lambda}{d\lambda} \in \mathcal{L}(\mathcal{D};H)$ et que $\frac{dM_\lambda}{d\lambda}$ est analytique de $\mathcal{D}$ dans K, on obtient en dérivant (4) par rapport à ε :

(5) $\qquad [L_\lambda - DM_\lambda(\vartheta(\varepsilon))] . \frac{d\vartheta(\varepsilon)}{d\varepsilon} + (k-1)\varepsilon^{k-2}[\frac{dL_\lambda}{d\lambda}\vartheta(\varepsilon) - \frac{dM_\lambda}{d\lambda}(\vartheta(\varepsilon))] \equiv 0.$

Notons alors, que $L_\lambda - DM_\lambda(\vartheta(\varepsilon)) \equiv L'_\varepsilon$, et que (5) fournit les premiers termes du développement du vecteur propre $u'(\varepsilon)$ relatif à la valeur propre $\zeta'(\varepsilon)$ de L'_ε . En effet si on pose a priori :

$$u'(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{k-1} n\, \varepsilon^{n-1} w_n + \varepsilon^{k-1} u'^{(k)} + \ldots$$ (le vecteur propre est défini en fait à une constante près).

on obtient

$$L'_\varepsilon u'(\varepsilon) = L'_\varepsilon \frac{d\mathcal{V}(\varepsilon)}{d\varepsilon} - L'_\varepsilon\Big(\sum_{n=k}^{\infty} n\varepsilon^{n-1} w_n\Big) + \varepsilon^{k-1} L'_\varepsilon u'^{(k)} + \ldots$$

$$= -(k-1)\varepsilon^{k-1} L^{(1)} w_1 - k\varepsilon^{k-1} L_{\lambda_o} w_k + \varepsilon^{k-1} L_{\lambda_o} u'^{(k)} + O(\varepsilon^k).$$

Il en résulte que $\underline{\zeta'(\varepsilon) = \varepsilon^{k-1}\zeta'^{(k-1)} + O(\varepsilon^k)}$, avec

$$\zeta'^{(k-1)} w_1 = -(k-1)P(\lambda_o)L^{(1)} w_1 = -(k-1)\zeta^{(1)} w_1,$$

d'où $\boxed{\zeta'^{(k-1)} = -(k-1)\zeta^{(1)}} > 0$

Pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$, et k pair, la valeur propre "la plus à gauche" de L'_ε est de la forme $-(k-1)(\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)} + o(\lambda-\lambda_o)$, et l'on obtient un <u>résultat analogue à celui du a)</u>. Pour k impair et $\alpha_{ok} < 0$, on ne doit considérer que $\lambda > \lambda_o$, et les deux solutions bifurquées (cf. chapitre VIII) sont <u>stables</u>.

c) - <u>$k > 2$, $\varepsilon = (\lambda_o-\lambda)^{1/k-1}$, k impair</u> $(\alpha_{ok} > 0)$.

Par les mêmes calculs que précédemment, on arrive à

$$\zeta'^{(k-1)} = (k-1)\zeta^{(1)} < 0,$$

et pour $\lambda \in \mathcal{V}^-(\lambda_o)$, la valeur propre la plus à gauche de L'_ε est de la forme $(k-1)\zeta^{(1)}(\lambda_o-\lambda) + o(|\lambda_o-\lambda|)$. Il en résulte que dans ce cas les deux solutions bifurquées sont <u>instables</u>.

<u>Remarque</u>. Des résultats analogues ont été trouvés par D.H. SATTINGER dans [1], par la "méthode du degré topologique".
Très récemment, M.G. CRANDALL et P.H. RABINOWITZ ont trouvé des résultats tout à fait semblables dans un cadre non-analytique plus général [2].

III. <u>Stabilité non linéaire</u>.

1) <u>Justification de la linéarisation</u>.

Nous avons posé au § II, $u = \mathcal{U}(\lambda) + v \equiv \mathcal{V}(\varepsilon) + v$, et le problème est en fait d'étudier le comportement, quand $t \longrightarrow \infty$, de la solution du problème d'évolution :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + L'_\varepsilon v - M'_\varepsilon(v) = 0, & v \in C^0(o,\infty;\mathcal{D}) \cap C^1(o,\infty;H), \\ v(o) = u_o - \mathcal{U}(\lambda) \in \mathcal{D}, \end{cases}$$

où $L_\varepsilon^\circ = L_\lambda - DM_\lambda(\mathcal{v}(\varepsilon))$ avec $\varepsilon = (\lambda-\lambda_o)^\theta$ ou $(\lambda_o-\lambda)^\theta$,
et $M_\varepsilon^\circ(v) = M_\lambda(\mathcal{v}(\varepsilon)+v) - M_\lambda[\mathcal{v}(\varepsilon)] - DM_\lambda(\mathcal{v}(\varepsilon)) \circ v$.

Le problème (1) est défini en fait pour $\varepsilon \in \mathcal{V}(o)$ dans $\mathbb{C}$, et le terme non linéaire vérifie :
$\exists\ \delta_o$ et $\gamma > 0$ tels que, pour $\|v\|_{\mathcal{D}} \leqslant \delta_o$, on ait

$$\|M_\varepsilon^\circ(v)\|_K \leqslant \gamma\|v\|_{\mathcal{D}}^2 ,$$

comme il résulte de l'analyticité de M_λ et de la définition de M_ε°.
D'autre part, l'application $(\varepsilon, v) \longrightarrow M_\varepsilon^\circ(v)$ est analytique au voisinage de $(0,0)$ de $\mathbb{C} \times \mathcal{D}$ dans K.

Pour pouvoir appliquer les résultats du chapitre VII, il nous faut encore montrer une estimation du type :

$$\|e^{-L_\varepsilon^\circ t}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} \leqslant \frac{c}{t^\alpha} \quad \text{pour } t \in]0,T].$$

Celle-ci peut être obtenue à l'aide du corollaire du § I, mais aussi directement de la manière suivante.

Démonstration.

Par définition $u(t) = e^{-L_\varepsilon^\circ t} v_o$ est la solution du problème linéaire :

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + L_\lambda u = DM_\lambda(\mathcal{v}(\varepsilon)) \circ u, \\ u(o) = v_o \in H \ , \ u \in C^o(0,T;H) \quad \forall T < \infty, \\ u \text{ continûment dérivable pour } t > 0 \text{ et } u(t) \in \mathcal{D} \text{ pour } t > 0. \end{cases}$$

Il s'agit en fait d'estimer $u(t)$ pour $v_o \in K \hookrightarrow H$, $t \in]0,T]$, T fini fixé. Or, si l'on considère l'espace de Banach $\mathcal{B}_\alpha$ des fonctions $t \longrightarrow u(t) \in \mathcal{D}$, continues pour $t \in]0,T]$, telles que $\sup\limits_{t\in[0,T]} (t^\alpha\|u(t)\|_{\mathcal{D}}) < \infty$, que l'on muni de la norme $u \longrightarrow |||u|||_\alpha = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|t^\alpha u(t)\|_{\mathcal{D}}$,
on sait déjà que $e^{-L_\lambda t} v_o \in \mathcal{B}_\alpha$ (d'après H.5). D'autre part, on sait d'après le § II, qu'il existe une constante $\gamma_2 > 0$ telle que

$$\|DM_\lambda(\mathcal{v}(\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D};K)} \leqslant \gamma_2|\lambda-\lambda_o|^\theta ,$$

et il est alors facile de montrer que l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_\varepsilon$, défini par

$$(\mathcal{L}_\varepsilon u)(t) = \int_o^t e^{-L_\lambda(t-\tau)} DM_\lambda(\mathcal{v}(\varepsilon)) \circ u(\tau)d\tau$$

est borné dans $\mathcal{B}_\alpha$ par une constante de la forme $\gamma_3|\lambda-\lambda_o|^\theta \cdot T^{1-\alpha}$ (la continuité pour $t > 0$ résulte des calculs faits au chapitre VII).
Il en résulte qu'une solution $u \in \mathcal{B}_\alpha$ du problème

$$(3) \quad \begin{cases} u(t) = e^{-L_\lambda t} v_o + (\mathcal{L}_\varepsilon u)(t), \\ v_o \in K, \end{cases}$$

sera aussi solution de (2).

En effet, si u est solution de (3), $u \in \mathcal{B}_\alpha$ et $t \longrightarrow (\mathcal{L}_\varepsilon u)(t) \in C^o(0,T;H)$, d'où $u \in C^o(0,T;H)$ et on vérifie aisément que $u(o) = v_o$ dans H. Enfin, $\frac{du}{dt}$ est continu dans H pour $t > 0$, et l'équation (2) se vérifie de la même manière qu'au § II du chapitre VII.

Il suffit alors de remarquer que si $\varepsilon \in \mathcal{V}(0)$ fixé, $\exists$ T fini non nul tel que l'opérateur $\mathcal{L}_\varepsilon$ soit strictement contractant dans $\mathcal{B}_\alpha$. Le problème (3) admet donc la solution unique

$$u = (\mathbb{1} - \mathcal{L}_\varepsilon)^{-1} \circ [e^{-L_\lambda(\cdot)} v_o] \in \mathcal{B}_\alpha \ .$$

On a donc bien, pour u(t) solution de (2), une estimation du type annoncé. ▨

2) Résultats généraux.

On peut maintenant énoncer.

Théorème 1.

Dans le cadre des hypothèses H.1-2-3-4-5, et si H'.1 et H'.2 sont vérifiées, la stabilité de la solution bifurquée ne dépend que du signe des valeurs propres de l'opérateur $P(\lambda_o)L'^{(1)}P(\lambda_o)$ (opérant en dimension finie). Si elles sont toutes de même signe, positives par exemple, alors la solution bifurquée est stable pour $\lambda > \lambda_o$ et instable pour $\lambda < \lambda_o$. Si elles ne sont pas toutes de même signe la solution bifurquée est instable $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$.

Théorème 2.

Dans le cadre des hypothèses H.1-2-3-4-5, et si H'.3 et H'.4 sont vérifiées, alors d'une manière générale, la solution nulle et la solution bifurquée échangent leurs stabilités. Plus précisemment, si la bifurcation est bilatère, alors la solution secondaire est stable pour $\lambda > \lambda_o$ et instable pour $\lambda < \lambda_o$, tandis que si la bifurcation est unilatérale, les branches bifurquées sont stables ou instables selon que la bifurcation a lieu à droite ou à gauche de λ_o.

Démonstration.

Il suffit de vérifier que nous pouvons appliquer les résultats du chapitre VII (théorèmes 2 et 3) au problème d'évolution (1).

On a déjà vu au § II et au 1) du § III que l'opérateur L'_ε vérifie toutes les bonnes hypothèses pour $\varepsilon \in \mathcal{V}(o)$. Il nous faut donc montrer que M'_ε vérifie lui aussi les bonnes hypothèses. L'analyticité de $(\varepsilon, v) \longrightarrow M'_\varepsilon(v) = M_\lambda(\vartheta(\varepsilon)+v) - M_\lambda[\vartheta(\varepsilon)] - DM_\lambda(\vartheta(\varepsilon)).v$, de $\mathcal{V}(o) \times \mathfrak{D}$ à valeurs dans K, découle immédiatement de l'analyticité de $(\lambda, u) \longrightarrow M_\lambda(u)$, et de l'analyticité de $\vartheta(\varepsilon)$ et λ en ε. D'autre part, d'après les propriétés de la dérivée de $u \longrightarrow M_\lambda(u)$ en $\vartheta(\varepsilon)$, $\exists\ \delta_o$ tel que si $\|v\|_{\mathfrak{D}} \leqslant \delta_o$ alors $\|M'_\varepsilon(v)\|_K \leqslant \gamma' \|v\|^2_{\mathfrak{D}}$, où γ' est indépendant de $\varepsilon \in \mathcal{V}(o)$. ∎

3) Domaines de stabilité.

Nous sommes maintenant amenés à préciser dans quel domaine on peut prendre u_o pour que la solution du problème d'évolution tende vers la solution stable quand $t \longrightarrow +\infty$. Plaçons nous dans le cadre du chapitre VII, où l'on considérait le problème d'évolution

(4) $\quad \dfrac{du}{dt} + Lu - M(u) = 0, \quad u \in C^o(0,\infty;\mathfrak{D}) \cap C^1(0,\infty;H)$, et où L et M vérifient les "bonnes propriétés". Faisons de plus l'hypothèse suivante sur le spectre $\sigma(L)$:

$$\begin{cases} \exists\ \zeta_o > 0 \text{ valeur propre simple de } L \\ \mathrm{Re}\ [\sigma(L) - \{\zeta_o\}] > \tilde{\xi} > \zeta_o . \end{cases}$$

On suppose de plus que ζ_o est "petit" devant $\tilde{\xi}$ au sens suivant chaque fois que ζ_o interviendra dans une estimation ou un calcul, nous pourrons le rendre aussi petit que nous voudrons, alors que $\tilde{\xi}$ sera fixé ; ceci pour considérer ensuite le cas où ζ_o est d'ordre $\lambda - \lambda_o$, alors que $\tilde{\xi}$ est indépendant de λ au voisinage de λ_o, dans le cadre du problème considéré dans ce chapitre.

Lemme 1. $\exists$ une constante > 0, c_1 indépendante de ζ_o telle que, pour ζ_o assez petit, si l'on a

$$\|u_o\|_{\mathfrak{D}} \leqslant c_1 \zeta_o ,$$

alors la solution du problème d'évolution (4) existe, est unique, et tend exponentiellement vers 0 comme $e^{-\zeta_o t}$, quand $t \longrightarrow \infty$.

Ce lemme améliore le théorème 2 du chapitre VII.

Démonstration.

$\exists\ k > 0$ tel que

$$\|P\|_{\mathcal{L}(K;\mathfrak{D})} \leqslant k, \quad \|e^{-Lt}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{D})} \leqslant k\, e^{-\zeta_o t},$$

$$\|e^{-Lt}(\mathbb{1}-P)\|_{\mathcal{L}(K;\mathfrak{D})} \leqslant k(1+t^{-\alpha})e^{-\tilde{\xi} t}.$$

D'autre part, on sait qu'il existe $\gamma > 0$ tel que si $\|u\|_{\mathcal{D}}$, $\|u_1\|_{\mathcal{D}}$, $\|u_2\|_{\mathcal{D}} \leq \delta_o$, alors

$$\|M(u)\|_K \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{D}}^2 ,$$

$$\|M(u_2) - M(u_1)\|_K \leq \gamma(\|u_1\|_{\mathcal{D}} + \|u_2\|_{\mathcal{D}}) . \|u_2 - u_1\|_{\mathcal{D}} .$$

Si l'on pose alors $u_1(t) = e^{\zeta_o t} u(t)$, le problème (4) peut se formuler :

$$(5)\begin{cases} u_1(t) = e^{(\zeta_o - L)t} u_o + \int_o^t e^{(\zeta_o - L)(t-\tau)} e^{\zeta_o \tau} M[e^{-\zeta_o \tau} u_1(\tau)] d\tau , \\ u_1 \in C^o(0,\infty;\mathcal{D}) . \end{cases}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème du point fixe (Th. 1 du chapitre VI). En effet (5) est de la forme

$$u_1(t) = \mathcal{F}_t(u_o , u_1) ,$$

avec $\mathcal{F}$ continue de $\mathcal{D} \times C^o(0,\infty;\mathcal{D})$ dans $C^o(0,\infty;\mathcal{D})$ et telle que si $|||u_1|||_{\mathcal{D}}$ et $|||u_1'|||_{\mathcal{D}} \leq \delta_o$ on a

$$|||\mathcal{F}(u_o , u_1) - \mathcal{F}(u_o , u_1')|||_{\mathcal{D}} \leq \gamma_1(|||u_1|||_{\mathcal{D}} + |||u_1'|||_{\mathcal{D}}) \, |||u_1 - u_1'|||_{\mathcal{D}}$$

avec $\gamma_1 = k\gamma \int_o^\infty [(1 + \frac{1}{\tau^\alpha}) e^{(\zeta_o - \tilde{\xi})\tau} + e^{-\zeta_o \tau}] d\tau .$

Pour ζ_o assez petit, on a $\gamma_1 \leq \frac{2k\gamma}{\zeta_o}$.

Soit $\delta_1 = \inf (\delta_o , \frac{\zeta_o}{8k\gamma})$, alors $\mathcal{F}(u_o , .)$ est contractant de rapport 1/2 dans la boule de centre 0, de rayon δ_1.

De plus si $\|u_o\|_{\mathcal{D}} < \delta_1/2k$, alors

$$|||\mathcal{F}(u_o , 0)|||_{\mathcal{D}} \leq k\|u_o\|_{\mathcal{D}} < \frac{\delta_1}{2} .$$

On est donc bien dans le cadre du théorème 1 du chapitre VI qui fournit l'existence et l'unicité d'une solution de (5) dans la boule de rayon δ_1. Le lemme s'en déduit immédiatement. ▮

Considérons maintenant le cas où $\underline{\zeta_o < 0}$ (mais petit), et précisons le théorème 5 du chapitre VII.

<u>Lemme 2.</u> <u>$\exists$ deux constantes</u> > 0, c_2 <u>et</u> c_3 <u>indépendantes de</u> ζ_o <u>telles que pour</u> $|\zeta_o|$ <u>assez petit, si l'on a</u> $u_o \notin \mathcal{V}_{\zeta_o}$ <u>et</u> $\|u_o\|_{\mathcal{D}} \leq c_2|\zeta_o|$, <u>alors</u> $\exists\, t_o \geq 0$ <u>tel que</u> $u(t_o)$ <u>vérifie</u> $\|Pu(t_o)\|_{\mathcal{D}} = c_3 |\zeta_o|$. $\mathcal{V}_{\zeta_o}$ <u>est la variété de codimension 1, définie au théorème 3 du chapitre VII, et</u> $u(.)$ <u>est la solution du problème d'évolution (4) vérifiant</u> $u(0) = u_o$.

Démonstration.

a) - Montrons que si $v_o \in \mathcal{V}_{\zeta_o}$, alors $\exists\, \delta_2$ et $\gamma_2 > 0$ indépendants de ζ_o, tels que si $\|(\mathbb{1}-P)v_o\|_{\mathcal{D}} \leq \delta_2$, alors

$$\|Pv_o\|_{\mathcal{D}} \leq \gamma_2 \|(\mathbb{1}-P)v_o\|^2_{\mathcal{D}} .$$

En effet, si nous reprenons les notations du chapitre VII, on sait que $\forall \beta \in [0,\tilde{\xi}]$, $t \longrightarrow e^{-Lt}(\mathbb{1}-P) \in \mathcal{L}(\mathcal{D};C^o_\beta)$;

$$u \longrightarrow \hat{\mathcal{B}}(u) \ : \ t \longrightarrow \hat{\mathcal{B}}_t(u) \equiv \int_0^t (\mathbb{1}-P)e^{-L(t-\tau)}M[u(\tau)]d\tau$$

est analytique au voisinage de 0 dans C^o_β et vérifie

$|||\hat{\mathcal{B}}(u)|||_\beta \leq \gamma' |||u|||^2_\beta$ avec γ' indépendant de β ; de plus

$$u \longrightarrow \check{\mathcal{B}}(u) \ : \ t \longrightarrow \check{\mathcal{B}}_t(u) \equiv \int_t^\infty e^{-L(t-\tau)}PM[u(\tau)]d\tau$$

est analytique au voisinage de 0 dans C^o_β et vérifie

$|||\check{\mathcal{B}}(u)|||_\beta \leq \frac{\gamma''}{2\beta-\zeta_o} |||u|||^2_\beta$ avec γ'' indépendant de β.

Si on choisit pour le moment $\beta = \tilde{\xi}$, alors l'équation

$$(6) \qquad u(t) = e^{-Lt}w_o + \hat{\mathcal{B}}_t(u) - \check{\mathcal{B}}_t(u) \quad , \quad Pw_o = 0 ,$$

admet une solution et une seule dans $C^o_{\tilde{\xi}}$ au voisinage de 0, pourvu que $\|w_o\|_{\mathcal{D}} \leq \delta_2$. On note $\mathcal{U}(w_o, .)$ la solution de (6) (δ_2 est indépendant de ζ_o). L'équation de la variété $\mathcal{V}_{\zeta_o}$ est alors :

$Pv_o = -\check{\mathcal{B}}_o\{\mathcal{U}[(1-P)v_o, .]\}$ (cf. chapitre VII).

La conclusion du a) est alors immédiate.

b) - Supposons maintenant que $u_o \notin \mathcal{V}_{\zeta_o}$ et décomposons le problème d'évolution (4) sous la forme

$$(7) \qquad Pu(t) = Pe^{-Lt}u_o + \int_0^t e^{-L(t-\tau)}PM[u(\tau)]d\tau .$$

$$(8) \qquad (\mathbb{1}-P)u(t) = e^{-Lt}(\mathbb{1}-P)u_o + \hat{\mathcal{B}}_t(u).$$

Si $\|Pu(t)\|_{\mathcal{D}}$ reste borné sur $(0,\infty)$, cela implique

$$Pu_o + \int_0^t e^{L\tau}PM[u(\tau)]d\tau \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ,$$

d'où $\quad Pu_o + \int_0^t e^{L\tau}PM[u(\tau)]d\tau = -\int_t^\infty e^{L\tau}PM[u(\tau)]d\tau,$

et $e^{-Lt}Pu_o + \int_0^t e^{-L(t-\tau)}PM[u(\tau)]d\tau = -\check{\mathcal{B}}_t(u)$.

Il en résulte que si $\|Pu(t)\|_{\mathcal{D}}$ reste borné, u est alors solution de (6) avec $w_o = (\mathbb{1}-P)u_o$ et $u \in C^o(0,\infty;\mathcal{D})$, car d'après (8), si $\|Pu(t)\|_{\mathcal{D}} \leqslant \delta_2$, $\exists \delta'_2$ et γ'_2 (δ_2, δ'_2, γ'_2 indépendants de ζ_o) tels que pour $\|(\mathbb{1}-P)u_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant \delta'_2$ on ait $\|(\mathbb{1}-P)u(t)\|_{\mathcal{D}} \leqslant \gamma'_2$. Mais cela revient à faire $\beta = 0$ dans le a) précédent. Or, nous pouvons assurer l'existence d'une solution u de (6) dans une boule de rayon $\gamma'_3|\zeta_o|$, dans le cas où $\|(\mathbb{1}-P)u_o\| \equiv \|w_o\| \leqslant \delta'_3|\zeta_o|$ ($\exists \gamma'_3$ et $\delta'_3 > 0$ indépendants de ζ_o, grâce à l'estimation du a) sur $|||\check{\mathcal{B}}(u)|||_o$), et alors $u_o \in \mathcal{V}_{\zeta_o}$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Il en résulte qu'il existe $c_2 > 0$ tel que si l'on a $\|u_o\|_{\mathcal{D}} < c_2|\zeta_o|$, alors $\|(\mathbb{1}-P)u_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant \delta'_3|\zeta_o|$ et $\|Pu(t)\|_{\mathcal{D}}$ ne peut être borné comme ci-dessus, par la quantité $\gamma'_3|\zeta_o|\cdot\|P\|$. ∎

<u>Remarque</u>. Soit $w(\zeta_o)$ le vecteur propre de L^* associé à ζ_o, alors les nombres réels

$$(Pu_o + \check{\mathcal{B}}_o\{\mathcal{U}[(\mathbb{1}-P)u_o,\circ]\}, w(\zeta_o))$$

et $$(Pu(t_o) + \check{\mathcal{B}}_o\{\mathcal{U}[(\mathbb{1}-P)u(t_o),\circ]\}, w(\zeta_o))$$ ont le même signe.

En effet si ce n'était pas le cas il existerait $t_1 \in [0,t_o]$ tel que $Pu(t_1) + \check{\mathcal{B}}_o\{\mathcal{U}[(\mathbb{1}-P)u(t_1),\circ]\} = 0$, c'est à dire $u(t_1) \in \mathcal{V}_{\zeta_o}$ ce qui n'est pas possible puisque $u_o \notin \mathcal{V}_{\zeta_o}$. Or, on peut remarquer que $\|(\mathbb{1}-P)u(t_o)\|_{\mathcal{D}}$ est borné par $c_4|\zeta_o|$ (d'après l'équation (8)), d'où $(\check{\mathcal{B}}_o\{\mathcal{U}[(\mathbb{1}-P)u(t_o),\circ]\}, w(\zeta_o))$ est majoré par $c'_4|\zeta_o|^2$. Il en résulte que <u>$(Pu_o + \check{\mathcal{B}}_o\{\mathcal{U}[(\mathbb{1}-P)u_o,\circ]\}, w(\zeta_o))$ a, pour ζ_o assez petit, le même signe que $(u(t_o), w(\zeta_o))$</u>. Or $w(\zeta_o)$ est orthogonal à $(\mathbb{1}-P)H$ qui est la variété linéaire tangente à $\mathcal{V}_\zeta$ en 0. On peut alors interpréter la remarque en disant que <u>u_o et $u(t_o)$ sont d'un même côté de $\mathcal{V}_{\zeta_o}$</u>.

Plaçons nous maintenant dans le cadre des hypothèses du théorème 2. On note $\mathcal{U}(\lambda)$ la solution bifurquée et on suppose qu'il existe au moins une branche pour $\lambda > \lambda_o$. On note $\mathcal{V}_\lambda$ la variété $\mathcal{V}$ pour λ fixé, de codimension 1, introduite au chapitre VII. D'après le § II et les lemmes 1 et 2 précédents, nous savons donc que :

$\exists\, c_1$ indépendant de $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ tel que si

(9) $\|u_o - \mathcal{U}(\lambda)\|_{\mathcal{D}} \leqslant c_1(\lambda-\lambda_o)$,

alors la solution du problème d'évolution

$$(10)\qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} + L_\lambda u - M_\lambda(u) = 0, \\ u(0) = u_o \in \mathcal{D} \quad , \ u \in C^o(0,\infty;\mathcal{D}) \cap C^1(0,\infty;H) \ , \end{cases}$$

tend exponentiellement vers $\mathcal{U}(\lambda)$ quand $t \longrightarrow \infty$.

Nous savons de plus, que

$\exists\, c_2$ et c_3 indépendants de $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ tels que si
$u_o \notin \mathcal{V}_\lambda$ et $\|u_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant c_2(\lambda-\lambda_o)$,

alors $\exists\, t_o \geqslant 0$ tel que $u(t_o)$ vérifie $\|P(\lambda)u(t_o)\| = c_3(\lambda-\lambda_o)$, où $u(\circ)$ est la solution de (10), $u(t_o)$ étant du même côté de $\mathcal{V}_\lambda$ que u_o.

Le problème alors se pose de savoir ce qu'il se passe quand $t \longrightarrow \infty$, dans le cas où u_o ne vérifie pas (9) et $\notin \mathcal{V}_\lambda$.

D'après ce qui précède on peut toujours supposer

$$\|P(\lambda)u_o\|_{\mathcal{D}} = c_3(\lambda-\lambda_o) \ , \ \|[\mathbb{1} - P(\lambda)]u_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant c_4(\lambda-\lambda_o),$$

et étudier le problème d'évolution associé. Il s'agit alors de prouver qu'il existe $t_1 \geqslant 0$ tel que $\|u(t_1) - \mathcal{U}(\lambda)\|_{\mathcal{D}} \leqslant c_1(\lambda-\lambda_o)$, puisqu'alors on sera sûr que $u(t) \longrightarrow \mathcal{U}(\lambda)$ quand $t \longrightarrow \infty$. Pour faire cette étude il semble nécessaire de procéder directement sur le sous-espace propre associé à la valeur propre $\zeta(\lambda)$ de L_λ. Nous le ferons dans le cas où la solution bifurquée est analytique en $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$, c'est à dire $\alpha_{o2} \neq 0$ dans l'équation de bifurcation*. Il est raisonnable de penser que l'on a dans les autres cas des résultats analogues à celui qui va être montré, bien que la technique s'alourdisse considérablement.

Montrons donc le

<u>Théorème 3</u>.

<u>Dans le cadre des hypothèses du théorème 2 avec en plus</u> $\alpha_{o2} \neq 0$, $\exists$ <u>un voisinage à droite</u> $\mathcal{V}^+(\lambda_o)$ <u>tel que si</u> $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ <u>et</u> $\|u_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant c_2(\lambda-\lambda_o)$, <u>on a les résultats suivants</u> :

i) <u>si</u> $u_o \in \mathcal{V}_\lambda$, <u>alors la solution du problème d'évolution (10) tend exponentiellement vers 0 dans</u> $\mathcal{D}$ <u>quand</u> $t \longrightarrow \infty$;

ii) <u>si</u> $u_o \notin \mathcal{V}_\lambda$ <u>et si</u> u_o <u>est du même côté de</u> $\mathcal{V}_\lambda$ <u>que la solution bifurquée</u> $\mathcal{U}(\lambda)$, <u>c'est à dire si</u>

$(P(\lambda)u_o + \mathcal{B}_o\{\mathcal{U}[[\mathbb{1}-P(\lambda)]u_o,\circ]\}, w(\lambda))$ <u>est du même signe que</u> $(\mathcal{U}(\lambda), w(\lambda))$, <u>où</u> $L^*_\lambda w(\lambda) = \zeta(\lambda)w(\lambda)$, <u>alors la solution du problème</u>

* Dans le cas où $\alpha_{o2}=0$ et $\alpha_{o3} < 0$, on peut consulter [3] pour la technique de démonstration à adopter.

<u>d'évolution (10) tend exponentiellement vers $\mathcal{U}(\lambda)$ dans $\mathcal{D}$ quand</u> $t \longrightarrow \infty$;

iii) <u>si $u_o \notin \mathcal{V}_\lambda$ et si u_o n'est pas du même côté de $\mathcal{V}_\lambda$ que la solution bifurquée $\mathcal{U}(\lambda)$, alors la solution du problème d'évolution (10) sort d'un voisinage fixe de $\mathcal{V}_\lambda$ au bout d'un temps fini et on ne peut pas conclure sur son évolution ultérieure.</u>

<u>Remarque 1.</u> Les points i) et iii) ont été précédemment étudiés, on peut ajouter dans le cas iii) que l'on est sûr que $u(t) \not\to \mathcal{U}(\lambda)$ en restant dans un voisinage de 0 de l'ordre de $(\lambda-\lambda_o)$, sinon il y aurait un t_1 pour lequel $u(t_1) \in \mathcal{V}_\lambda$ et on serait alors dans le cas i).

<u>Remarque 2.</u> Pour le point ii) on peut supposer d'après le Lemme 2, que u_o vérifie :

$$\|P(\lambda)u_o\|_{\mathcal{D}} = c_3(\lambda-\lambda_o), \quad \|[\mathbb{1}-P(\lambda)]u_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant c_4(\lambda-\lambda_o)$$

et $(P(\lambda)u_o, w(\lambda))$ du même signe que $(\mathcal{U}(\lambda), w(\lambda))$ c'est à dire du signe de $\zeta^{(1)}/\alpha_{o2}$, puisque $\mathcal{U}(\lambda) = \frac{\zeta^{(1)}}{\alpha_{o2}}(\lambda-\lambda_o)u^{(o)} + O(\lambda-\lambda_o)^2$, où $L_{\lambda_o} u^{(o)}=0$, $\alpha_{o2} = (M_o^{(2)}(u^{(o)}, u^{(o)}), w^{(o)})$ et $L^*_{\lambda_o} w^{(o)} = 0$, avec $(u^{(o)}, w^{(o)}) = 1$ et $w(\lambda) = w^{(o)} + O(\lambda-\lambda_o)$.

<u>Démonstration du point ii)</u> :

Décomposons l'espace H $\forall u \in H$, $u = x+y$ où $x = P(\lambda)u = a\, u_1(\lambda)$, $y = [\mathbb{1}-P(\lambda)]u$, et $[L_\lambda - \zeta(\lambda)]u_1(\lambda) = 0$. On rappelle que $P(\lambda) \in \mathcal{L}(H;\mathcal{D})$. Le problème d'évolution (10) admet la formulation équivalente suivante

$$(11) \qquad \frac{dx}{dt} + \zeta(\lambda)x = P(\lambda)M_\lambda(x+y),$$

$$(12) \qquad y(t) = e^{-L_\lambda t} y_o + \int_o^t e^{-L_\lambda(t-\tau)} [\mathbb{1}-P(\lambda)]M_\lambda[x(\tau)+y(\tau)]d\tau,$$

$$(13) \qquad \begin{cases} x(o) = x_o = P(\lambda)u_o, \\ y_o = [\mathbb{1}-P(\lambda)]u_o, \; y \in C^o(0,\infty;\mathcal{D}) \;,\; x \in C^1(0,\infty;\mathcal{D}). \end{cases}$$

Il faut remarquer que l'équation (11) est unidimensionnelle (colinéaire à $u_1(\lambda)$), et que l'on peut résoudre (12) à l'aide du théorème des fonctions implicites par rapport à y au voisinage de 0, si on suppose $|||x|||_{\mathcal{D}_\infty} \leqslant \delta_1$ [indépendant de $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$], et sans oublier que $\|y_o\|_{\mathcal{D}} \leqslant c_4(\lambda-\lambda_o)$ par hypothèse. En remplaçant y dans (11), on arrive finalement à une équation intégrodifférentielle de la forme :

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{da}{dt} = -(\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}a + \alpha_{o2}a^2 + f(\lambda,a,y), \\ a(o) = a_o = (P(\lambda)u_o, w(\lambda)) \ , \ a \in C^1(0,\infty;\mathbb{R}), \end{cases}$$

où $y(t) = Y_t(y_o, a, \lambda)$ dépend des valeurs prises par a sur $[0,t]$, et où f est analytique par rapport à (λ,a,y) au voisinage de $(\lambda_o,0,0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathfrak{D}$ et vérifie

$$|f(\lambda,a,y)| \leqslant c\left[|a|\cdot\|y\|_{\mathfrak{D}} + |a|(\lambda-\lambda_o)^2 + |a|^2|\lambda-\lambda_o| + |a|^3 + \|y\|^2_{\mathfrak{D}}\right],$$

pour $|a(t)| \leqslant \delta_1'$. De plus, si on note

$$\|a\|_t = \sup_{\tau\in[0,t]} |a(\tau)|$$

on a l'estimation $\|Y_t\|_{\mathfrak{D}} \leqslant \gamma(\|y_o\|_{\mathfrak{D}} e^{-\tilde{\xi}t} + \|a\|_t^2)$, et les constantes c et γ sont indépendantes de $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$.
D'après la remarque 2, on peut supposer que a_o est du signe de $^{(1)}/\alpha_{o2}$ $(\zeta^{(1)} < 0)$ et vérifie $|a_o| = c_3'(\lambda-\lambda_o)$.

Considérons la fonction $a_1 \in C^1(0,\infty;\mathbb{R})$ qui vérifie

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{da_1}{dt} = -(\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}a_1 + \alpha_{o2}a_1^2 \\ a_1(o) = a_o \ . \end{cases}$$

On a en fait, pour $t \in [0,\infty[$

$$(16)\qquad \frac{1}{a_1(t)} = \frac{\alpha_{o2}}{(\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}}\left[1 - e^{(\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}t}\right] + \frac{1}{a_o}e^{(\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}t} \ .$$

De plus, si on note $b = a^{-1}$, $b_1 = a_1^{-1}$ et $h = b_1 - b$,
on obtient :

$$(17)\quad \begin{cases} \frac{dh}{dt} = (\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}h + f(\lambda,a,y)(b_1-h)^2, \\ h(o) = h_o = 0 \text{ et } a = (b_1-h)^{-1} \ . \end{cases}$$

Il s'agit de montrer que la différence $|a(t) - a_1(t)|$ reste $o(\lambda-\lambda_o)$ $\forall t \in [0,\infty[$, alors que $\|Y_t\|$ devient $o(\lambda-\lambda_o)$; cela prouvera bien que la solution $x(t) + y(t)$ du système (11), (12), (13) est à partir d'un certain $t_1 \geqslant 0$ dans un voisinage d'ordre $o(\lambda-\lambda_o)$ de $a_1(t)\ u_1(\lambda)$.
Or, on peut remarquer que pour t assez grand on a $\|a_1(t)u_1(\lambda) - \mathcal{U}(\lambda)\|_{\mathfrak{D}} = o(\lambda-\lambda_o)^*$, d'où la conclusion par le lemme 1. En fait, au lieu de majorer $|a - a_1|$, nous majorerons $|h|$ ce qui sera équivalent. Nous allons montrer qu'il existe une solution unique h de l'équation intégrodifférentielle (17) dans $C^1(0,\infty;\mathbb{R})$ telle que

---

$$a_1(t)u_1(\lambda) \xrightarrow[t\to\infty]{} (\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}\alpha_{o2}^{-1}\ u_1(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}\alpha_{o2}^{-1}\ u^{(o)} + 0(\lambda-\lambda_o)^2$$

et $\mathcal{U}(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}\alpha_{o2}^{-1}\ u^{(o)} + 0(\lambda-\lambda_o)^2$.

$\|h\|_\infty \leq K(\lambda-\lambda_o)^{-\beta}$ avec $\beta < 1$ ($\beta=1/2$ par exemple), et K indépendant de λ.
En effet d'après (16) on a :

$$m(\lambda-\lambda_o)^{-1} \leq |b_1(t)| \leq M(\lambda-\lambda_o)^{-1} ,$$

ce qui entraîne pour $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$,

$$m[2(\lambda-\lambda_o)]^{-1} \leq |b(t)| = |b_1(t)-h(t)| \leq 2M(\lambda-\lambda_o)^{-1}$$

et $$|a(t)-a_1(t)| = \frac{|h(t)|}{|b(t)||b_1(t)|} \leq 2Km^{-2}(\lambda-\lambda_o)^{2-\beta} = o(\lambda-\lambda_o),$$

ce qu'il était suffisant de démontrer.

Pour montrer l'existence d'une solution unique de (17) dans $C^1(0,\infty;\mathbb{R})$, nous allons employer le théorème 1 du chapitre VI, appliqué à l'équation

(18) $$h(t) = \int_0^t g_\tau(\lambda,h,y_o)d\tau,$$

où $g_t(\lambda,h,y_o) \equiv (\lambda-\lambda_o)\zeta^{(1)}h + f(\lambda,a,Y_t)(b_1-h)^2$,
avec $a = (b_1-h)^{-1}$ et $Y_t = Y_t(y_o,a,\lambda)$.

Soit B_T la boule de centre 0, de rayon $K(\lambda-\lambda_o)^{-\beta}$ de $C^o(0,T;\mathbb{R})$, on sait alors que si $h \in B_T$, $g(\lambda,h,y_o) \in C^o(0,T;\mathbb{R})$ puisque $\|a-a_1\|_T = o(\lambda-\lambda_o)$ entraîne que $Y_t \in C^o(0,T;\mathcal{D})$ et que f est analytique par rapport à (a,Y_t) au voisinage de 0 dans $C^o(0,T;\mathbb{R}) \times C^o(0,T;\mathcal{D})$ à valeurs dans $C^o(0,T;\mathbb{R})$.
En fait on a, pour $h \in B_T$:

(19) $$|g_t(\lambda,h,y_o)| \leq \gamma_1[K(\lambda-\lambda_o)^{1-\beta} + M'(\lambda-\lambda_o) + c_4' e^{-\tilde{\xi}t}] \leq \gamma_2 \text{pour}$$

$t \in [0,T]$. De plus, si h_1 et $h_2 \in B_T$,

$$|g_t(\lambda,h_2,y_o) - g_t(\lambda,h_1,y_o)| \leq \gamma_3(\lambda-\lambda_o).\|h_2-h_1\|_t.$$

Choisissons alors $T_o = K[2\gamma_2(\lambda-\lambda_o)^\beta]^{-1}$, il est alors immédiat de voir que le second membre de (18) est strictement contractant :

$$\left\|\int_0^t g_\tau(\lambda,h_2,y_o)d\tau - \int_0^t g_\tau(\lambda,h_1,y_o)d\tau\right\|_{T_o} \leq K\gamma_3(2\gamma_2)^{-1}(\lambda-\lambda_o)^{1-\beta}\|h_2-h_1\|_T$$

où $\exists \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ tel que $K\gamma_3(2\gamma_2)^{-1}(\lambda-\lambda_o)^{1-\beta} \leq k < 1/2$,

et que de plus : $\left\|\int_0^t g_\tau(\lambda,h,y_o)d\tau\right\|_{T_o} \leq \dfrac{K}{2(\lambda-\lambda_o)^\beta} < (1-k).[K(\lambda-\lambda_o)^{-\beta}]$.

En appliquant le théorème du point fixe, on a donc l'existence d'une solution unique h de (18) dans $C^o(0,T_o;\mathbb{R})$, d'où $h \in C^1(0,T_o;\mathbb{R})$ d'après (18) et h est solution de (17) sur $[0,T_o]$.

Or, $\exists\ \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ tel que si $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ on ait $e^{-\tilde{\xi}T_o} < \lambda-\lambda_o$, il en résulte que pour $t \geqslant T_o$, si $h \in B_T$, avec $T > T_o$, on a

(20) $\quad |g_t(\lambda,h,y_o)| \leqslant \gamma_1 [K(\lambda-\lambda_o)^{1-\beta} + M''(\lambda-\lambda_o)]$.

Or, on a déjà $\quad |h(T_o)| \leqslant K[2(\lambda-\lambda_o)^{\beta}]^{-1} < (1-k)[K(\lambda-\lambda_o)^{-\beta}]$,

et
$$\left\|h(T_o) + \int_{T_o}^{T_o+t} g_\tau(\lambda,h,y_o)d\tau\right\|_{T_o} \leqslant \frac{K}{2(\lambda-\lambda_o)^{\beta}} + \gamma_1 T_o [K(\lambda-\lambda_o)^{1-\beta} + M''(\lambda-\lambda_o)]$$
$$< (1-k)[K(\lambda-\lambda_o)^{-\beta}],$$

dès que $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ adéquat. On peut donc assurer l'existence de h sur $[0,2T_o]$ et si nous montrons que pour $t \geqslant T_o$, $|h(t)|$ reste borné par $K[2(\lambda-\lambda_o)^{\beta}]^{-1}$, on pourra itérer indéfiniment le raisonnement et prolonger la solution sur $[0,\infty[$.

Or, si $h \in B_T$, $\exists\ \gamma_4$ indépendant de $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ tel que l'on ait
$$|f(\lambda,a,Y_t)(b_1-h)^2| \leqslant \gamma_4(\lambda-\lambda_o) \text{ pour } t \geqslant T_o$$
et (17) montre que si $|h| > \gamma_4|\zeta^{(1)}|^{-1}$, alors $\frac{d|h|}{dt} < 0$.

Comme pour $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$, on a $K[2(\lambda-\lambda_o)^{\beta}]^{-1} > \gamma_4|\zeta^{(1)}|^{-1}$,

il en résulte que $\forall t > T_o$ on a $\quad |h(t)| \leqslant K[2(\lambda-\lambda_o)^{\beta}]^{-1}$. ▨

<u>Bibliographie</u>.

[1] D.H. SATTINGER, Stability of bifurcating solutions by Leray-Schauder degree ; Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. <u>43</u>, N°2, 1971, p. 154-166.

[2] M.G. CRANDALL et P.H. RABINOWITZ, Bifurcation, Perturbation of simple eigenvalues and linearized stability ; Archive for Rational Mechanics and Analysis (à paraître).

[3] G. IOOSS, Théorie non linéaire de la stabilité des écoulements laminaires. Thèse, Paris, 1971 (chapitre 7).

-:-:-:-

Exercices.

1. Soit $H = \mathbb{R}^2$ et le système différentiel suivant, vérifié par $(x_1, x_2) \in C^1(0,\infty;H)$:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + (1-\lambda)x_1 + x_2^2 = 0, \\ \dfrac{dx_2}{dt} + (1+\lambda)x_2 + x_1^2 = 0. \end{cases}$$

Les solutions stationnaires de (1) ont été données à l'annexe 1 du chapitre VIII. Etudier la stabilité de la solution nulle et la stabilité des solutions bifurquées, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (le théorème 2 s'applique).

2. Soient $H = [L^2(o,\pi)]^2$ et $\mathcal{D} = [H^2(o,\pi) \cap H_0^1(o,\pi)]^2$ munis des produits scalaires classiques (cf. le N.B. du problème récapitulatif).

On note $U = (u,v) \in H$ et $\forall U \in \mathcal{D}$

$$L_\lambda U = (-u'' - \lambda u, -v'' + \lambda v)$$

$$M(U) = (\sin x(v^2 + v'^2), \sin x(u^2 + u'^2))$$

a) – Quels sont les points de bifurcation de la solution nulle de $L_\lambda U + M(U) = 0$. (Réponse : $\lambda_{k\pm} = \pm k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$)

b) – Montrer que les branches bifurquées en $\lambda_{1+} = 1$ et $\lambda_{1-} = -1$, se raccordent, et donner l'expression globale de cette branche. (Réponse : $\mathcal{U}(\lambda) = (-(1-\lambda)^{1/3}(1+\lambda)^{2/3}\sin x\ ,\ -(1-\lambda)^{2/3}(1+\lambda)^{1/3}\sin x))$.

c) – Stabilité de la solution nulle pour le problème d'évolution :

$$\frac{dU}{dt} + L_\lambda U + M(U) = 0\ ,\ U \in C^0(0,\infty;\mathcal{D}) \cap C^1(0,\infty;H).$$

(On montre que le spectre de L_λ est constitué des valeurs propres $\zeta_{k\pm} = \pm\lambda + k^2$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0$ est stable pour $\lambda \in]-1,1[$).

Montrer qu'il y a échange des stabilités entre 0 et les solutions bifurquées en 1 et -1.

Problème récapitulatif.

Le but du problème est d'étudier le comportement quand $t \longrightarrow \infty$ de la solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \lambda u_1 - u_1 u_2 = 0 \\
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \lambda^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \lambda^4 u_2 - u_2\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{\lambda x}{2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right) = 0 \\
\qquad x \in [0,1] \;,\; t \in [0,\infty[\;, \\
\qquad u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t) = 0 \;, \\
\qquad \left.\begin{array}{l} u_1(x,0) = u_{1,o}(x) \\ u_2(x,0) = u_{2,o}(x) \end{array}\right\} \text{donnés.}
\end{array}\right.$$

On étudiera la stabilité de la solution $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$, on montrera qu'il existe $\lambda_o > 0$ tel que pour λ réel $> \lambda_o$ cette solution est instable et qu'alors, c'est une autre solution stationnaire "bifurquée" qui est stable (en un sens à préciser).

Texte.

N.B. Si $\mathfrak{h}$ est un Hilbert, alors $\mathfrak{h}^2$ sera l'Hilbert muni du produit scalaire $U,V \longrightarrow [U,V]_{\mathfrak{h}^2} = [u_1,v_1]_{\mathfrak{h}} + [u_2,v_2]_{\mathfrak{h}}$ où $U = (u_1,u_2)$ et $V = (v_1,v_2)$.

I. Soit l'Hilbert $H = \{L^2(0,1)\}^2$, on considère la famille d'opérateurs linéaires $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{C}-\{0\}}$, telle que $\forall\, U = (u_1,u_2) \in \mathcal{D} = \{H^2(0,1) \cap H_o^1(0,1)\}^2$, on ait

$$L_\lambda U = (-\lambda^{-1}u_1'' + u_2' - \lambda u_1 \;,\; -\lambda^2 u_2'' - \lambda^4 u^2) \in H \;.$$

1) Montrer que $\forall\,\lambda$ fixé $\neq 0$, $\exists\,\zeta$ réel tel que $\zeta\mathbb{1} - L_\lambda$ admette un inverse compact dans H (on peut utiliser les résultats de l'exercice 5 du chapitre III).

2) Montrer que $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{C}-\{0\}}$ est une famille holomorphe de type (A).

3) Spectre de L_λ ? Pour λ réel > 0, quelle est la valeur propre de partie réelle $\xi_o(\lambda)$ la plus petite ?
Donner l'indice et la multiplicité de celle-ci.

4) Montrer qu'il existe $\lambda_o > 0$ tel que $\xi_o(\lambda_o) = 0$, $\xi_o(\lambda) > 0$ pour $0 < \lambda < \lambda_o$, $\xi_o(\lambda) < 0$ pour $\lambda > \lambda_o$, pour $\lambda = \lambda_o$, donner une base du sous-espace invariant relatif à la valeur propre nulle $\{V_1, V_2\}$ (montrer que sa dimension est 2).

5) Montrer que L_λ est m-sectoriel pour $\lambda > 0$.

6) Quel est l'adjoint L_λ^* de L_λ ? (On peut utiliser les résultats de l'exercice 5 du chapitre III).
Donner pour $\lambda = \lambda_o$, une base $\{W_1, W_2\}$ du sous-espace invariant relatif à la valeur propre nulle, telle que $[W_i, V_j]_H = \delta_{ij}$ $i,j=1,2$.

7) Expression de $L^{(1)}U$ pour $U \in \mathfrak{D}$ (on notera $L^{(1)}U = \frac{d}{d\lambda} (L_\lambda U)\Big|_{\lambda=\lambda_o}$).

Expression de la matrice représentant $P(\lambda_o)L^{(1)}P(\lambda_o)$ dans la base $\{V_1, V_2\}$, où $P(\lambda_o)$ est la projection invariante associée à la valeur propre nulle de L_{λ_o}. Diagonaliser $P(\lambda_o)L^{(1)}P(\lambda_o)$ (donner ses valeurs propres et une base le diagonalisant).

II. On considère, d'autre part, la famille d'opérateurs M_λ , telle que $U = (u_1, u_2) \in \mathfrak{D}$, $M_\lambda(U) = (u_1 u_2, u_2(u_1' - \frac{\lambda x}{2} u_2')) \in K = \{H_o^1(0,1)\}^2$.

1) $(\lambda, U) \longrightarrow M_\lambda(U)$ est analytique de $\mathbb{C} \times \mathfrak{D}$ dans K, et peut s'écrire au voisinage de $(\lambda_o, 0)$ sous la forme :

$$M_\lambda(U) = \sum_{\substack{p\geq 2\\ n\geq 0}}^{\infty} (\lambda-\lambda_o)^n \, M_n^{(p)}(U,\ldots,U) \; ,$$

où $M_n^{(p)}$ est p-linéaire continue de $\mathfrak{D}$ dans K.
Donner les expressions de $M_o^{(2)}(U,V)$ et $M_1^{(2)}(U,V)$ pour U et V quelconques dans $\mathfrak{D}$.

2) Soient $V_1^{(o)}$ et $V_2^{(o)}$ les vecteurs propres de $P(\lambda_o)L^{(1)}P(\lambda_o)$ où on a noté $V_1^{(o)}$ celui qui vérifie

$$M_o^{(2)}(V_1^{(o)}, V_1^{(o)}) = 0 \; .$$

En posant $U^{(o)} = a_o V_1^{(o)} + b_o V_2^{(o)}$, on montrera que l'équation

$$P(\lambda_o)L^{(1)}U^{(o)} - P(\lambda_o)M_o^{(2)}(U^{(o)},U^{(o)}) = 0$$

admet une solution $U^{(o)}$ non nulle, dans $\mathcal{D}$ (on ne calculera que les coefficients nécessaires au raisonnement).

3) Montrer qu'il existe une solution non nulle $\mathcal{U}(\lambda)$ de l'équation

$$L_\lambda U - M_\lambda(U) = 0 \quad , \quad U \in \mathcal{D}$$

dans un voisinage de λ_o, telle que $\lambda \longrightarrow \mathcal{U}(\lambda)$ soit analytique, de la forme

$$\mathcal{U}(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)\ U^{(o)} + O((\lambda-\lambda_o)^2) \ .$$

4) Stabilité de la solution $\mathcal{U}(\lambda)$? Montrer que l'on a

$$\|e^{-L_\lambda t}\|_{\mathcal{L}(K;\mathcal{D})} < \frac{c}{t^{1/2}} \quad \text{pour} \quad t \in]0,T] \quad , \ \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$$

(on peut utiliser le résultat démontré à l'annexe 2 du chapitre VII dans le cas $K = H_o^1(0,1)$ pour pouvoir employer le corollaire du lemme 1 du chapitre IX).

5) Calculer les deux premiers termes de l'équation de la variété $\mathcal{V}_\lambda$ au voisinage de 0, telle que si $U_o \in \mathcal{V}_\lambda$, $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$, alors la solution du problème d'évolution tend exponentiellement vers 0 quand $t \longrightarrow \infty$.

-:-:-:-