

Bifurcations de tores invariants

A. CHENCINER & G. IOOSS

Présenté par D. D. JOSEPH

Table des matières

I. Introduction	109
II. Stabilité d'un tore invariant et spectrographes	113
II-0. Notations	113
II-1. Spectrographes et variétés invariantes	115
II-2. Le cas particulier d'un difféomorphisme de $T^1 \times \mathbb{R}$ au voisinage de $T^1 \times 0$	133
II-3. Le cas où le spectrographe contient une valeur propre	140
III. Bifurcation d'un tore invariant T^n en un tore invariant T^{n+1} en présence d'une valeur propre	143
III-1. Réduction à la dimension deux	144
III-2. Bifurcation en dimension deux lorsque $A_0(\theta)$ est constant	147
IV. Résonnances	159
IV-1. Réduction à la dimension un ou à la dimension deux	159
IV-2. Cas $r=1$ et $r=2$	160
IV-3. Cas $r=3$	164
IV-4. Cas $r=4$	171
V. Commentaires et contre-exemples	176
V-1. Etude des hypothèses	176
V-2. Sur le changement de stabilité du tore invariant	179
V-3. Suppression de certaines hypothèses diophantiennes	189
V-4. Un contre-exemple	191
V-5. En guise de conclusion	197
Bibliographie	197

Chapitre I. Introduction

Soit $(E_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}}$ une famille à un paramètre d'équations différentielles autonomes de classe C^k (i.e. de champs de vecteurs) dans un espace de Banach B . Plus généralement, tout ce qui va suivre s'applique à des systèmes d'évolution de type Navier-Stokes qui, bien que correspondant à des opérateurs non bornés, ont toute la régularité voulue pour faire fonctionner nos techniques (régularité par rapport au temps et à la donnée initiale): voir [11] et [17]. Pour simplifier l'exposé nous resterons dans le cadre C^k .

Supposons que, pour μ voisin de 0, E_μ possède un tore* invariant T_μ de dimension $n+1$ dépendant régulièrement (C^k) de μ , et que pour $\mu \leq 0$ ce tore invariant soit asymptotiquement stable**.

Si pour $\mu > 0$ voisin de 0 le tore T_μ invariant par E_μ cesse d'être asymptotiquement stable, il peut arriver qu'un nouveau compact K_μ invariant par E_μ et asymptotiquement stable apparaisse au voisinage de T_μ : on dit alors qu'il y a bifurcation de l'attracteur T_μ en l'attracteur K_μ .

Si $n=0$, il résulte de [18], [19] que génériquement (au sens de la catégorie de Baire) il y a effectivement bifurcation de l'orbite périodique T_μ en un tore invariant de dimension deux K_μ (l'hypothèse de stabilité asymptotique pour $\mu=0$ se traduit génériquement par l'attractivité vague au sens de [17]).

Dans cet article nous étudions le cas $n > 0$ et donnons des hypothèses (de nature infinitésimale en $\mu=0$) assurant que le tore invariant asymptotiquement stable T_μ de dimension $n+1$ bifurque pour $\mu=0$ en un tore invariant asymptotiquement stable K_μ de dimension $n+2$ (ou $n+1$ dans certains cas de «résonance»).

Il ne faut cependant pas en déduire une trop grande analogie entre la situation $n=0$ et celle que nous étudions: nos hypothèses ne sont pas génériquement satisfaites et les bifurcations que nous caractérisons sont sans doute un phénomène assez exceptionnel pour $n > 0$ (voir chapitre V).

La technique que nous utilisons est analogue à celle de [18]: nous commençons par ramener le problème d'équation différentielles à un problème de difféomorphismes à l'aide d'une surface de section.

Nous supposons que le champ E_0 ne s'annule pas sur T_0 ; si $n=1$, T_0 est de dimension deux, et ceci implique l'existence sur T_0 d'une courbe fermée (de classe C^k) γ_0 transverse aux orbites de E_0 (voir [20]). Si T_0 provient par une bifurcation récente d'une orbite périodique devenue instable nous sommes dans cette situation et, de plus, toute orbite de E_0 issue de γ_0 recoupe γ_0 à un instant ultérieur, ce qui définit un difféomorphisme de Poincaré de classe C^k de γ_0 sur γ_0 . Après un éventuel changement de variables, on peut supposer que γ_0 n'est autre que $0 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T_0$.

Dans le cas général nous ferons des hypothèses analogues: nous supposons qu'après un éventuel changement de coordonnées dans T_0 , le tore de dimension n : $\gamma_0 = 0 \times \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1} = T_0$ est transverse aux orbites de E_0 , et tel que toute orbite issue de γ_0 recoupe γ_0 à un instant ultérieur. Cette situation se produit par exemple si la restriction de E_0 à T_0 est proche d'un champ quasi périodique.

Nous supposons enfin que la restriction à γ_0 du fibré normal à T_0 dans B est triviale. Cette hypothèse n'est pas gênante: le fibré considéré est stablement trivial (trivialité du fibré tangent de T^{n+1}) et on peut le rendre trivial par une opération de stabilisation analogue à celle utilisée au paragraphe III-1.

Le difféomorphisme de Poincaré de γ_0 sur γ_0 est alors la restriction d'un plongement de classe C^k

$$\bar{F}_0: \gamma_0 \times \mathcal{V} \rightarrow \gamma_0 \times E$$

* Le tore de dimension n standard sera pour nous $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$.

** Cela signifie que pour tout voisinage \mathcal{V}_0 de T_μ il existe un voisinage \mathcal{V}_1 de T_μ tel que pour tout $t \geq 0$ la solution $X(t)$ reste dans \mathcal{V}_0 si $X(0) \in \mathcal{V}_1$, et que de plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(X(t), T_\mu) = 0$.

(\mathcal{V} voisinage de 0 dans E , E fibre du fibré normal à T_0 dans B), décrivant le premier retour d'une trajectoire dans une couronne $\gamma_0 \times \mathcal{V} \cong T^n \times \mathcal{V}$ transverse à T_0 et l'intersectant suivant γ_0 .

Remarquons que pour μ proche de 0 une telle application de premier retour

$$\bar{F}_\mu: \gamma_0 \times \mathcal{V} \rightarrow \gamma_0 \times E$$

est également définie dans la même couronne en suivant les orbites de E_μ .

D'après l'hypothèse, \bar{F}_μ possède un tore invariant** de dimension n proche de $\gamma_0 \times 0$; quitte à effectuer une famille de changements de variable dépendant de μ dans $\gamma_0 \times \mathcal{V}$ on peut supposer que, pour μ proche de 0, le tore invariant $\gamma_0 \times 0$ est laissé invariant par \bar{F}_μ .

Nous étudierons donc une famille à un paramètre d'applications de classe C^k

$$\bar{F}_\mu: T^n \times \mathcal{V}, T^n \times 0 \rightarrow T^n \times E, T^n \times 0$$

induisant sur $T^n \times 0$ un difféomorphisme \bar{f}_μ . Remarquons que, de par son origine, \bar{f}_0 est pseudo-isotope* à l'identité, et donc en particulier homotope à l'identité; par continuité tous les \bar{f}_μ considérés sont homotopes à l'identité.

Les notions de stabilité se correspondant pour l'équation différentielle et le difféomorphisme, nous chercherons des conditions assurant que lorsque le tore $T^n \times 0$ invariant par \bar{F}_μ cesse d'être asymptotiquement stable, il apparait un tore de dimension $n+1$ invariant par \bar{F}_μ et asymptotiquement stable.

Ce passage d'un tore de dimension $n+1$ invariant par une équation différentielle à un tore de dimension n invariant par un difféomorphisme est surtout intéressant lorsque $n=1$ car, si le groupe des difféomorphismes du cercle commence à être bien connu, il n'en est pas de même du groupe des difféomorphismes de T^n pour $n > 1$ (voir [8]).

Le plan de l'article est le suivant:

Dans le paragraphe II-1 nous caractérisons «au premier ordre» la stabilité du tore invariant $T^n \times 0$ de \bar{F}_μ à l'aide de la notion de «transformée de graphes» \mathcal{F}_μ qui remonte à Hadamard (\mathcal{F}_μ est définie d'un voisinage ouvert de 0 dans $C^1(T^n; E)$ à valeurs dans $C^1(T^n; E)$ par la formule: graphe de $(\mathcal{F}_\mu X) = \bar{F}_\mu$ (graphe de X)).

La transformée de graphes $\mathcal{A}_\mu: C^1(T^n; E) \rightarrow C^1(T^n; E)$ associée à la composante normale \bar{G}_μ de la dérivée de \bar{F}_μ le long de $T^n \times 0$ est linéaire et joue le rôle d'une «dérivée» pour \mathcal{F}_μ ; son spectre (que nous appelons le l -spectrographe de \bar{F}_μ) joue dans cette théorie le rôle tenu par le spectre de la dérivée $dF_\mu(0)$ dans le cas de la famille de difféomorphismes $F_\mu: E, 0 \rightarrow E, 0$ étudié dans [18].

Nous démontrons dans ce cadre un théorème de variétés hyperboliques et un théorème de variété centrale; ce dernier permettra aux chapitres III et IV de remplacer $T^n \times E$ par une sous-variété de dimension finie.

* Cela signifie qu'il existe un difféomorphisme

$$\Phi: (T^n \times [0, 1], T^n \times \{0\}, T^n \times \{1\}) \rightarrow (T^n \times [0, 1], T^n \times \{0\}, T^n \times \{1\})$$

induisant l'identité sur $T^n \times \{0\}$ et \bar{f}_0 sur $T^n \times \{1\}$. Un tel difféomorphisme s'obtient à l'aide d'une renormalisation du champ E_0 rendant égal à l'unité le temps de premier retour de tout point de γ_0 .

** Des conditions suffisantes pour cela sont données dans [5 bis].

Dans le paragraphe II-2 nous étudions plus particulièrement le cas où $n=1$ et $E = \mathbb{R}$; lorsque \tilde{f}_μ est un difféomorphisme de T^1 de nombre de rotation irrationnel le spectrographe de \bar{F}_μ est contenu dans un cercle de centre l'origine; lorsque le nombre de rotation de \tilde{f}_μ est rationnel, le spectrographe de \bar{F}_μ peut fort bien contenir une couronne.

A partir du paragraphe II-3 apparaissent les hypothèses qui nous permettront de montrer aux chapitres III et IV les théorèmes de bifurcation: nous supposons que \tilde{f}_0 est conjugué à une rotation ergodique \bar{R}_{ω_0} de T^n et que le spectrographe de \bar{F}_0 contient une valeur propre $\lambda_0 = e^{2i\pi\Omega_0}$ de module 1 (cette dernière hypothèse est très forte, voir chapitre V et [5 bis]).

Si $\Omega_0 \notin \frac{1}{2}\omega_0 \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (cas de non-résonnance) il existe alors un sous-fibré ξ_0 de $T^n \times E$ difféomorphe à $T^n \times \mathbb{R}^2$ sur lequel \bar{G}_0 induit un difféomorphisme conjugué au produit du difféomorphisme \tilde{f}_0 de T^n par la rotation d'angle Ω_0 de \mathbb{R}^2 (si $\Omega_0 \in \frac{1}{2}\omega_0 \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (cas résonnant) la conclusion est analogue mais ξ_0 a pour fibre \mathbb{R} et n'est trivial que si $\Omega_0 \in \omega_0 \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$).

Si on suppose enfin que le reste du spectrographe (c'est-à-dire tout ce qui ne concerne pas ξ_0) est contenu dans un disque de rayon plus petit que 1, on peut utiliser le théorème de variété centrale II-1.7. pour ramener le problème de bifurcation dans $T^n \times E$ à un problème analogue dans ξ_0 .

Les chapitres III et IV sont consacrés à l'étude de ce dernier problème respectivement dans le cas non-résonnant et dans les cas résonnants.

On y effectue des changements de variables ramenant \bar{F}_μ à une perturbation d'une forme normale tronquée; pour cela nous sommes amenés à faire sur le couple (ω_0, Ω_0) des hypothèses de nature arithmétique (voir III-2.5. hypothèse (H'_2)) qui sont satisfaites génériquement au sens de la mesure de Lebesgue (voir V-1 et V-2).

Il reste à faire une hypothèse de transversalité assurant que la partie du spectrographe de \bar{F}_0 relative à ξ_0 traverse effectivement le cercle unité lorsque μ varie (voir III-2 et V-2; on remarquera que cette hypothèse n'implique nullement que pour μ différent de 0, le spectrographe de \bar{F}_μ ait une valeur propre). La forme normale tronquée possède alors pour $\mu > 0$ (resp. $\mu < 0$ suivant le caractère stable ou instable de $T^n \times 0$ pour \bar{F}_0) un tore invariant de dimension $n+1$ dans le cas non-résonnant, n dans le cas résonnant, dont on précise la stabilité; un principe de contraction analogue à celui utilisé par [18] permet de conclure qu'il en est de même pour \bar{F}_μ ce qui termine la démonstration (Théorèmes III-2.11 et V-3.1, IV-2.2, IV-2.3, IV-3.4, IV-4.4; pour ne pas alourdir la rédaction ces théorèmes sont énoncés dans le cadre ξ_0 et non pas dans le cadre $T^n \times E$).

Dans cette introduction nous n'avons pas précisé les pertes de différentiabilité; on se reportera pour cela aux différents chapitres concernés.

Le chapitre V contient d'une part la discussion des hypothèses et leur affaiblissement dans certains cas, d'autre part un exemple montrant que bien que ces hypothèses (éventuellement renforcées) soient une généralisation à un nombre infini de valeurs propres des hypothèses classiques de bifurcation de Hopf, la situation géométrique dans l'espace fonctionnel est beaucoup plus complexe que la situation analogue en dimension finie.

Terminons ce chapitre par quelques notations (compatibles avec celles de [8]): $\text{Diff}_0^k(T^n)$ est le groupe de difféomorphismes de classe C^k de T^n qui sont homotopes à l'identité.

$D^k(T^n)$ est le groupe des difféomorphismes de classe C^k de \mathbb{R}^n qui s'écrivent $f = \text{Identité} + \varphi$, où $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est \mathbb{Z}^n -périodique.

Tout élément \bar{g} de $\text{Diff}_0^k(T^n)$ peut être relevé en un élément g de $D^k(T^n)$ bien défini à une translation près par un élément de \mathbb{Z}^n .

On notera R_ω la translation de \mathbb{R}^n définie par $R_\omega(x) = x + \omega$ ($\omega \in \mathbb{R}^n$). R_ω est un élément de $D^\infty(T^n)$ dont l'image dans $\text{Diff}_0^\infty(T^n)$ est la «rotation» \bar{R}_ω de T^n .

Une application $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sera dite de classe C^α si:

- 1) φ est de classe $C^{[\alpha]}$ ($[\alpha]$ = partie entière de α),
- 2) $D^{[\alpha]}\varphi$ est Hölderienne d'exposant $\alpha - [\alpha]$.

Une application $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sera dite de classe $C^{r,1}$, r entier, si

- 1) φ est de classe C^r ,
- 2) $D^r\varphi$ est lipschitzienne.

On notera $- \rightarrow$ les germes d'application.

$\mathcal{L}(E_1; E_2)$ désigne le Banach des applications linéaires bornées du Banach E_1 dans le Banach E_2 , avec la norme usuelle. Dans le cas où $E_1 = E_2$, on le note $\mathcal{L}(E)$.

Nota: Les résultats de ce travail ont été en partie annoncés dans [4], [5], [12].

Chapitre II. Stabilité d'un tore invariant et spectrographes

II-0. Notations

Nous avons vu plus haut comment l'étude du comportement de la famille (E_μ) d'équations différentielles au voisinage du tore invariant T_μ se ramène à celle d'une famille de germes d'applications

$$\bar{F}_\mu: (T^n \times E, T^n \times 0) - \rightarrow (T^n \times E, T^n \times 0)$$

où E est un Banach sur \mathbb{R} .

Dans la suite du chapitre, on fixe un voisinage \mathcal{V} de 0 dans E et on considère une application de classe C^k , $k \geq 1$

$$\bar{F}: T^n \times \mathcal{V} \rightarrow T^n \times E$$

induisant sur $T^n \times 0$ un difféomorphisme $\bar{g} \in \text{Diff}_0^k(T^n)$.

On relève \bar{F} aux revêtements universels en une application

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n \times E$$

$$F(\theta, x) = (f(\theta, x), \Phi(\theta, x))$$

ayant les propriétés suivantes:

$$f(\theta, x) = \theta + \varphi(\theta, x)$$

(ceci traduit que \bar{g} est homotope à l'identité)

$$\varphi(\theta, x) \text{ et } \Phi(\theta, x) \text{ sont } \mathbb{Z}^n\text{-périodiques en } \theta, \quad \Phi(\theta, 0) \equiv 0.$$

L'application g définie par

$$g(\theta) = f(\theta, 0) = \theta + \varphi(\theta, 0)$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n qui relève \bar{g} ($g \in D^k(T^n)$ dans les notations du chapitre I).

On définit pour tout θ un élément $A(\theta) \in \mathcal{L}(E)$ par

$$A(\theta) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\theta, 0).$$

Si F est un plongement (c'est-à-dire si \bar{F} est un plongement), $A(\theta)$ est dans $GL(E)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$. Remarquons que l'application $\theta \mapsto A(\theta)$ est \mathbb{Z}^n -périodique.

Si le $p^{\text{ème}}$ itéré de F est défini, on le note

$$F^p = (f_p, \Phi_p).$$

Soit $G: \mathbb{R}^n \times E \rightarrow \mathbb{R}^n \times E$ l'application de classe C^{k-1} définie par

$$G(\theta, x) = (g(\theta), A(\theta)x).$$

L'interprétation de G est la suivante (l'application $\bar{G}: T^n \times E \rightarrow T^n \times E$ qui se déduit de G par quotient par \mathbb{Z}^n a bien entendu une interprétation analogue; nous travaillons dans le revêtement universel pour écrire des formules globales): le fibré $\tau_{\mathbb{R}^n \times 0}(\mathbb{R}^n \times E)$, restriction à $\mathbb{R}^n \times 0$ du fibré tangent de $\mathbb{R}^n \times E$ se décompose naturellement en somme du fibré $\tau(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tangent à $\mathbb{R}^n \times 0$ et du fibré $\mathbb{R}^n \times E$ normal à $\mathbb{R}^n \times 0$

$$\tau_{\mathbb{R}^n \times 0}(\mathbb{R}^n \times E) \cong \tau(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}^n \times E \cong \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \oplus E).$$

Dans cette décomposition, la restriction à $\mathbb{R}^n \times 0$ de l'application tangente à F s'écrit

$$\tau_{\mathbb{R}^n \times 0} F: \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \oplus E) \rightarrow \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \oplus E)$$

$$(\tau_{\mathbb{R}^n \times 0} F)[\theta, (\alpha, X)] = [g(\theta), (\beta, Y)]$$

avec

$$\begin{cases} \beta = Dg(\theta)\alpha + \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, 0)X \\ Y = A(\theta)X. \end{cases}$$

En passant au quotient par le sous-fibré invariant $\tau(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sur lequel $\tau_{\mathbb{R}^n \times 0} F$ induit l'application tangente à g , on obtient l'application G . En particulier, à F^p correspond l'application G^p obtenue en itérant G .

$$G^p(\theta, x) = (g^p(\theta), A_p(\theta)x),$$

avec

$$A_p(\theta) = A(g^{p-1}(\theta))A(g^{p-2}(\theta))\dots A(\theta) \in \mathcal{L}(E).$$

Autrement dit

$$f_p(\theta, 0) = g^p(\theta), \quad \frac{\partial \Phi_p}{\partial x}(\theta, 0) = A_p(\theta).$$

II-1. Spectrographes et variétés invariantes

Pour caractériser de manière utilisable la stabilité du tore $T^n \times 0$ invariant par \bar{F} , nous reprenons la vieille idée de Hadamard des « transformées de graphes ».

Soit $\mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(T^n; E)$ l'espace de Banach des applications de classe C^k de T^n dans E muni de la topologie C^k . On identifiera \mathcal{C}^k au sous-espace de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, E)$ formé des applications \mathbb{Z}^n -périodiques. On note $\| \cdot \|_k$ la norme sur cet espace.

Soit $X: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ un élément de \mathcal{C}^l ($1 \leq l \leq k$). Si $\|X\|_l$ est assez petit, l'application f_X de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n définie par

$$f_X(\theta) = f(\theta, X(\theta))$$

est un difféomorphisme de classe C^l (c'est-à-dire $f_X \in D^l(T^n)$). Cela vient de ce que l'ensemble des difféomorphismes de classe C^l est ouvert dans l'ensemble des applications de classe C^l de T^n dans T^n pour $l \geq 1$.

La formule

$$(\mathcal{F} X)(f(\theta, X(\theta))) = \Phi(\theta, X(\theta))$$

définit donc une application

$$\mathcal{F}: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{C}^l$$

d'un voisinage \mathcal{O} de 0 dans \mathcal{C}^l à valeurs dans \mathcal{C}^l : le graphe de $\mathcal{F} X$ est l'image par F du graphe de X .

Remarquons que, lorsqu'il est défini, le $p^{\text{ème}}$ itéré \mathcal{F}^p de \mathcal{F} vérifie

$$(\mathcal{F}^p X)(f_p(\theta, X(\theta))) = \Phi_p(\theta, X(\theta)).$$

Si dans la formule ci-dessus on remplace F respectivement par

$$G: \mathbb{R}^n \times E \rightarrow \mathbb{R}^n \times E$$

$$\tau(g): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (\text{application tangente à } g)$$

$$L: \mathbb{R}^n \times E \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \text{définie par } L(\theta, x) = \left(g(\theta), \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, 0)x \right)$$

on obtient pour $0 \leq l \leq k-1$, les applications linéaires

$$\mathcal{A}: \mathcal{C}^l(T^n; E) \rightarrow \mathcal{C}^l(T^n; E)$$

$$\mathcal{T}: \mathcal{C}^l(T^n; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^l(T^n; \mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{B}: \mathcal{C}^l(T^n; E) \rightarrow \mathcal{C}^l(T^n; \mathbb{R}^n)$$

définies respectivement par

$$(\mathcal{A} X)(\theta) = A(g^{-1}(\theta)) X(g^{-1}(\theta))$$

$$(\mathcal{T} \alpha)(\theta) = Dg(g^{-1}(\theta)) \alpha(g^{-1}(\theta))$$

$$(\mathcal{B} X)(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(g^{-1}(\theta), 0) X(g^{-1}(\theta)).$$

Soit, pour $0 \leq l \leq k-1$, Σ_l le Banach des sections de classe C^l du fibré $\tau_{T^n \times 0}(T^n \times E)$, et soit

$$\bar{F}_l: \Sigma_l \rightarrow \Sigma_l$$

l'application linéaire définie par

$$\bar{F}_l(\sigma) = (\tau \bar{F}) \circ \sigma \circ \bar{F}^{-1};$$

sous l'identification naturelle de Σ_l à

$$\mathcal{C}^l(T^n; \mathbb{R}^n \oplus E) \cong \mathcal{C}^l(T^n; \mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{C}^l(T^n; E),$$

\bar{F}_l est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} \mathcal{F} & \mathcal{B} \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix}$.

\mathcal{F} décrit le comportement au premier ordre de \bar{F} tangentiellement à la variété invariante $T^n \times 0$, \mathcal{A} décrit le comportement au premier ordre de \bar{F} en projection sur le fibré normal à $T^n \times 0$ dans $T^n \times E$ (c'est-à-dire le comportement de \bar{G}).

Le lemme suivant dit qu'on peut également considérer \mathcal{A} comme une dérivée:

II-1.1. Lemme*. \mathcal{F} définit une application de classe C^1 de $\mathcal{O} \subset C^1(T^n; E)$, à valeurs dans $\mathcal{C}^0(T^n; E)$, dont la dérivée en 0 est égale à \mathcal{A} .

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned} ((D\mathcal{F}(X))Y)(\theta) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(f_X^{-1}(\theta), X(f_X^{-1}(\theta))) \cdot Y(f_X^{-1}(\theta)) \\ &\quad - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(f_X^{-1}(\theta), X(f_X^{-1}(\theta))) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(f_X^{-1}(\theta), X(f_X^{-1}(\theta))) \circ DX(f_X^{-1}(\theta)) \right] \circ K, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} K &= \left[\frac{\partial f}{\partial \theta}(f_X^{-1}(\theta), X(f_X^{-1}(\theta))) + \frac{\partial f}{\partial x}(f_X^{-1}(\theta), X(f_X^{-1}(\theta))) \circ DX(f_X^{-1}(\theta)) \right]^{-1} \circ L, \\ L &= \frac{\partial f}{\partial x}(f_X^{-1}(\theta), X(f_X^{-1}(\theta))) \cdot Y(f_X^{-1}(\theta)). \end{aligned}$$

II-1.2. Remarques. (i) De même, si $1 \leq l \leq k$, \mathcal{F} définit une application de classe C^q d'un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}^l(T^n; E)$ à valeurs dans $\mathcal{C}^{l-q}(T^n; E)$.

(ii) Rappelons que \mathcal{A} est défini de \mathcal{C}^0 dans \mathcal{C}^0 ; si \mathcal{F}^p est défini, la dérivée en 0 de \mathcal{F}^p considérée comme application de $\mathcal{O} \subset \mathcal{C}^1$ à valeurs dans \mathcal{C}^0 est égale à \mathcal{A}^p .

Le lemme qui suit est évident (considérer des applications constantes).

II-1.3. Lemme. Si 0 est un point fixe asymptotiquement stable de \mathcal{F} dans \mathcal{C}^l (pour l entre 1 et k), $T^n \times 0$ est un tore invariant asymptotiquement stable de \bar{F} .

Si \mathcal{F} était dérivable de \mathcal{C}^1 dans \mathcal{C}^1 de dérivée \mathcal{A} , il suffirait pour vérifier l'hypothèse du lemme précédent de faire une hypothèse sur le spectre du complexifié de \mathcal{A} . Nous allons voir que cette démarche aboutit bien que la situation soit légèrement différente (c'est essentiellement grâce à II.1.2.(ii)).

* Contrairement à ce qui est écrit dans [5], \mathcal{F} n'est pas dérivable de \mathcal{C}^1 dans \mathcal{C}^1 .

Soit $E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ le complexifié de E , $A_{\mathbb{C}}$ le complexifié de A (agissant sur le premier facteur); le complexifié de $\mathcal{C}^l(T^n; E)$ sera identifié à $\mathcal{C}^l(T^n; E_{\mathbb{C}})$; le complexifié de \mathcal{A} est alors l'opérateur $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^l(T^n; E_{\mathbb{C}}))$ défini par la même formule que \mathcal{A} à la condition d'y remplacer A par $A_{\mathbb{C}}$. On notera encore $\|\cdot\|_l$ la norme dans $\mathcal{C}^l(T^n; E_{\mathbb{C}})$.

II-1.4. Définition. On appelle l -spectrographe de \bar{F} , et on note $S_l(\bar{F})$ le spectre de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^l(T^n; E_{\mathbb{C}}))$; on note également

$$s_l(\bar{F}) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in S_l(\bar{F})\},$$

$$i_l(\bar{F}) = \inf \{|\lambda|, \lambda \in S_l(\bar{F})\}.$$

Rappelons que $S_l(\bar{F})$ est un compact non vide de \mathbb{C} et que

$$s_l(\bar{F}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|\mathcal{A}^p\|_l^{\frac{1}{p}},$$

$$i_l(\bar{F})^{-1} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|\mathcal{A}^{-p}\|_l^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } \mathcal{A} \text{ est inversible,}$$

où

$$\|\mathcal{A}\|_l = \sup_{X \in \mathcal{C}^l(T^n; E)} \frac{\|\mathcal{A}X\|_l}{\|X\|_l}.$$

II-1.5. Lemme. Si $k \geq 2$, et si le 0-spectrographe de \bar{F} est contenu dans l'intérieur de disque unité de \mathbb{C} , $T^n \times 0$ est un tore invariant asymptotiquement stable de \bar{F} .

Démonstration. L'hypothèse peut encore s'écrire

$$s_0(\bar{F}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|\mathcal{A}^p\|_0^{\frac{1}{p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} \|\mathcal{A}_p(\theta)\| \right)^{\frac{1}{p}} < 1$$

et entraîne l'existence d'un entier q et d'un réel $0 < \rho < 1$ tels que $\sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} \|A_q(\theta)\| \leq \rho^q$.

Ecrivons $\Phi_q(\theta, x) = A_q(\theta)x + R_q(\theta, x)$. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que si $\|x\| \leq \delta$, $\sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} \|R_q(\theta, x)\| \leq \varepsilon \|x\|$; en effet,

$$\|R_q(\theta, x)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{\substack{\theta \in \mathbb{R}^n \\ \|y\| \leq \|x\|}} \left\| \frac{\partial^2 \Phi_q}{\partial x^2}(\theta, y) \right\| \|x\|^2,$$

et la fonction périodique continue $\left\| \frac{\partial^2 \Phi_q}{\partial x^2}(\theta, y) \right\|$ est majorée uniformément sur $\mathbb{R}^n \times 0$, donc sur le produit de \mathbb{R}^n par une boule de E (compacité de T^n). On en déduit

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} \|\Phi_q(\theta, x)\| \leq \lambda \|x\|$$

avec $0 < \lambda < 1$ si δ est assez petit. Par récurrence, il vient

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} \|\Phi_{pq}(\theta, x)\| \leq \lambda^p \|x\| \quad \text{si } \|x\| \leq \delta.$$

Enfin, Φ_r étant C^1 , il existe une constante K telle que

$$\|\Phi_r(\theta, x)\| \leq K \|x\| \quad \text{si } \|x\| \leq \delta \text{ pour } 1 \leq r \leq q-1.$$

De l'identité

$$\Phi_{p_{q+r}}(\theta, x) = \Phi_r(f_{p_q}(\theta, x), \Phi_{p_q}(\theta, x))$$

on déduit:

$$\forall s, \|\Phi_s(\theta, x)\| \leq K \lambda^{[s/q]} \|x\| \quad \text{pour } \|x\| \leq \delta$$

ce qui démontre le lemme.

Nous considérons maintenant le cas où le 0-spectrographe de \bar{F} n'est pas contenu dans l'intérieur du disque unité de \mathbb{C} , et donnons deux théorèmes d'existence de variétés invariantes: le premier, qui traite du cas hyperbolique est essentiellement dans [10] et sert à montrer l'instabilité d'un tore invariant; le deuxième, qui traite du cas central, est l'outil fondamental dans l'étude des bifurcations.

Ces théorèmes sont énoncés et démontrés sous la forme simple où nous les utiliserons; il existe des analogues plus fins du théorème II.1.6. dont nous dirons un mot à la remarque II.1.17.

Dans ces deux théorèmes, on suppose que le 0-spectrographe de \bar{F} se décompose en $S_0(\bar{F}) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ avec

$$b = \sup_{\lambda \in \sigma_1} |\lambda| < \inf_{\lambda \in \sigma_2} |\lambda| = a$$

et que les sous-espaces invariants \mathcal{E}_i de $\mathcal{C}^0(T^n; E)$ relatifs à σ_i ($i=1, 2$) sont de la forme

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{C}^0(T^n, E_i) \quad (\text{alors } E = E_1 \oplus E_2).$$

Rappelons que $S_0(\bar{F})$ est le spectre de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, où \mathcal{A} est défini par

$$(\mathcal{A} X)(\theta) = A(g^{-1}(\theta)) X(g^{-1}(\theta)).$$

Pour tout θ , $A(\theta)$ laisse invariants E_1 et E_2 ; on note $A_1(\theta)$, $A_2(\theta)$ les opérateurs obtenus par restriction.

Soit enfin $\sigma_3 = S_0(\tau(\bar{g}))$ le 0-spectrographe de $\tau(\bar{g})$, c'est-à-dire le spectre de $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$, où \mathcal{T} est défini par

$$(\mathcal{T} \alpha)(\theta) = Dg(g^{-1}(\theta)) \alpha(g^{-1}(\theta)).$$

On note

$$\beta = \inf_{\lambda \in \sigma_3} |\lambda| \leq \sup_{\lambda \in \sigma_3} |\lambda| = \alpha.$$

Les conclusions des deux théorèmes concernent les applications

$$\bar{F}': T^n \times \mathcal{V}, T^n \times 0 \rightarrow T^n \times E, T^n \times 0$$

de classe C^k «suffisamment» proches de \bar{F} dans le sens suivant: soit $F' = F + H'$ un relèvement de \bar{F}' à $\mathbb{R}^n \times E$;

$$H'(\theta, x) = (h'(\theta, x), R'(\theta, x)), \quad R'(\theta, 0) \equiv 0.$$

On supposera que $h'(\theta, 0)$, $\frac{\partial R'}{\partial x}(\theta, 0)$ et toutes* leurs dérivées existantes (en θ) sont majorées en norme par $\varepsilon > 0$ assez petit.

* C'est un peu trop fort mais suffisant pour nous.

Remarquons que si on note $F' = G + H$, $H(\theta, x) = (h(\theta, x), R(\theta, x))$, cela revient à supposer que $R(\theta, 0) \equiv 0$, et que $h(\theta, 0)$, $\frac{\partial R}{\partial x}(\theta, 0)$ et toutes leurs dérivées existantes (en θ) sont majorées en norme par ε . En effet, $h(\theta, 0) = h'(\theta, 0)$ et $\frac{\partial R}{\partial x}(\theta, 0) = \frac{\partial R'}{\partial x}(\theta, 0)$.

II-1.6. Théorème. *On suppose* que $k \geq 2$, et que $b < \beta^j \leq \alpha^j < a$ pour $0 \leq j \leq k-1$. Si \bar{F}' est assez proche de \bar{F} (c'est-à-dire ε assez petit), il existe deux sous-variétés uniques $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1(\bar{F}')$ (variété stable), $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2(\bar{F}')$ (variété instable), respectivement graphes d'applications*

$$\varphi_1: T^n \times E_1 - \rightarrow E_2, \quad \varphi_2: T^n \times E_2 - \rightarrow E_1$$

de classe $C^{k-2,1}$, définies au voisinage de $T^n \times 0$ telles que

- (1) $\varphi_1(\theta, 0) \equiv \varphi_2(\theta, 0) \equiv 0$.
- (2) Si $k \geq 3$, $D\varphi_1(\theta, 0)$ et $D\varphi_2(\theta, 0)$ sont proches de 0 (et égales à 0 si $\bar{F}' = \bar{F}$).
- (3) \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont localement invariantes par \bar{F}' ; de plus si $(\theta, x) \in \mathcal{V}_1$ (resp. \mathcal{V}_2) et si $p \geq 0$, $\bar{F}'^p(\theta, x)$ (resp. $\bar{F}'^{-p}(\theta, x)$) est défini et tend vers $T^n \times 0$ lorsque $p \rightarrow +\infty$ (ces propriétés caractérisent \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 au voisinage de $T^n \times 0$).
De plus \mathcal{V}_2 est localement attractante.

II-1.7. Théorème. *On suppose que $k \geq 3$, et que $b < \alpha^i \beta^j$ pour $0 \leq i + j \leq k-2$.*

On suppose aussi que $A_2(\theta) = A_2$ est indépendant de θ . On suppose enfin qu'il existe une fonction $\rho: E_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^k égale à 1 au voisinage de 0 et nulle hors de la boule unité de E_2 .

Si \bar{F}' est assez proche de \bar{F} (c'est-à-dire ε assez petit) il existe une sous-variété \mathcal{V}_2 (variété centrale), non unique en général, graphe d'une application

$$\varphi_2: T^n \times E_2 - \rightarrow E_1$$

de classe $C^{k-3,1}$ définie au voisinage de $T^n \times 0$, telle que

- (1) $\varphi_2(\theta, 0) \equiv 0$,
- (2) si $k \geq 4$, $D\varphi_2(\theta, 0)$ est proche de 0 (identique à 0 si $\bar{F}' = \bar{F}$),
- (3) \mathcal{V}_2 est localement invariante par \bar{F}' ,
- (4) \mathcal{V}_2 est localement attractante par \bar{F}' , ce qui signifie que si un point $(\theta, x) \in T^n \times E$ et tous ses itérés positifs par \bar{F}' sont assez proches de $T^n \times 0$, les itérés $\bar{F}'^p(\theta, x)$ de ce point tendent vers \mathcal{V}_2 quand p tend vers $+\infty$.

II-1.8. Préliminaire à la démonstration des Théorèmes II.1.6. et II.1.7. La technique de démonstration, analogue pour les deux théorèmes, est bien connue (voir [6], [10]): on se ramène à un théorème de point fixe dans un espace (complet pour la topologie C^0) de fonctions lipschitziennes ainsi que leurs dérivées jusqu'à un certain ordre l .

La différence essentielle entre le cas hyperbolique et le cas central est la nécessité dans II.1.7. de modifier tout d'abord l'application \bar{F}' (par exemple en la rendant globale) pour se ramener à une situation où il y a unicité.

* Pour la variété \mathcal{V}_1 il suffit de supposer $b < 1$ et $\alpha^j < a$, $j=0, \dots, k-1$. Pour la variété \mathcal{V}_2 il suffit de supposer $1 < a$ et $b < \beta^j$, $j=0, \dots, k-1$.

Il résulte des hypothèses que $E = E_1 \oplus E_2$, les E_i étant des sous-espaces invariants par $A(\theta)$ pour tout θ . On note

$$\begin{aligned} A(\theta)(x_1, x_2) &= (A_1(\theta)x_1, A_2(\theta)x_2), \\ A_N(\theta)(x_1, x_2) &= (A_{N,1}(\theta)x_1, A_{N,2}(\theta)x_2). \end{aligned}$$

Etant donné $\hat{\varepsilon} > 0$, on note

$$b_1 = b + \hat{\varepsilon}, \quad b_2 = (a - \hat{\varepsilon})^{-1}, \quad \alpha_1 = \alpha + \hat{\varepsilon}, \quad \alpha_2 = (\beta - \hat{\varepsilon})^{-1}.$$

On choisit $\hat{\varepsilon}$ assez petit pour que

$$\begin{aligned} b_1 \alpha_1^j < 1, \quad \alpha_1^j b_2 < 1, \quad 0 \leq j \leq k-1 \quad \text{dans II.1.6.} \\ b_1 b_2^i \alpha_2^j < 1, \quad 0 \leq i+j \leq k-2 \quad \text{dans II.1.7.} \end{aligned}$$

De l'expression explicite du rayon spectral d'un opérateur, on déduit l'existence d'un entier N tel que

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} \|A_{N,1}(\theta)\| &\leq b_1^N, & \sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} \|A_{N,2}(\theta)^{-1}\| &\leq b_2^N, \\ \sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} \|Dg^N(\theta)\| &\leq \alpha_1^N, & \sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} \|Dg^{-N}(\theta)\| &\leq \alpha_2^N. \end{aligned}$$

Pour donner un sens à la première ligne il suffit de montrer que $A_2(\theta)$ est inversible pour tout θ ; mais ceci est une conséquence facile de l'inversibilité de l'opérateur $\mathcal{A}_2: \mathcal{C}^0(T^n; E_2) \rightarrow \mathcal{C}^0(T^n; E_2)$ défini par

$$(\mathcal{A}_2 X_2)(\theta) = A_2(g^{-1}(\theta)) X_2(g^{-1}(\theta)).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} b_1^N (\alpha_2^N)^j < 1, \quad (\alpha_1^N)^j b_2^N < 1, \quad 0 \leq j \leq k-1 \quad \text{dans II.1.6.} \\ b_1^N (b_2^N)^i (\alpha_2^N)^j < 1, \quad 0 \leq i+j \leq k-2 \quad \text{dans II.1.7.} \end{aligned}$$

Afin de ne pas traîner un indice N dans tous les calculs, nous noterons à nouveau \bar{F}' à la place de \bar{F}'^N , $b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2$ à la place de $b_1^N, b_2^N, \alpha_1^N, \alpha_2^N$.

On note $F' = G + H$ un relèvement de \bar{F}' à $\mathbb{R}^n \times E$, avec

$$G(\theta, x) = (g(\theta), A(\theta)x), \quad H(\theta, x) = (h(\theta, x), R(\theta, x)).$$

On notera R_1, R_2 les composantes de R sur E_1 et E_2 .

Supposons F et F' de classe C^2 , donc R de classe C^1 en θ , et soit $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$,

$$\|h(\theta, 0)\| \leq \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, 0) \right\| \leq \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial R_i}{\partial x}(\theta, 0) \right\| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Rappelons que $R(\theta, 0) \equiv 0$:

Soit $E(2\tau)$ la boule de E de centre 0 et de rayon 2τ ; il existe $K > 0$ tel que les majorations suivantes soient vérifiées pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}^n$, et $x, x' \in E(2\tau)$. On a noté $\eta = \varepsilon + 2K\tau$:

- (1) $\|h(\theta, x) - h(\theta, x')\| \leq K \|x - x'\|,$
- (1') $\|h(\theta, x)\| \leq \varepsilon + K \|x\| \leq \eta,$
- (2) $\|h(\theta, x) - h(\theta', x)\| \leq (\varepsilon + K \|x\|) \|\theta - \theta'\| \leq \eta \|\theta - \theta'\|,$
- (3) $\|R_i(\theta, x) - R_i(\theta, x')\| \leq (\varepsilon + K \sup(\|x\|, \|x'\|)) \|x - x'\| \leq \eta \|x - x'\|,$
- (3') $\|R_i(\theta, x)\| \leq (\varepsilon + K \|x\|) \|x\| \leq \eta \|x\|,$
- (4) $\|R_i(\theta, x) - R_i(\theta', x)\| \leq K \|x\| \|\theta - \theta'\| \leq 2K\tau \|\theta - \theta'\|.$

Il suffit de prendre pour K un majorant sur $\mathbb{R}^n \times E(2\tau)$ de

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial x}(\theta, x) \right\|, \quad \left\| \frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial x}(\theta, x) \right\|, \quad \left\| \frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2}(\theta, x) \right\|, \quad \left\| \frac{\partial^2 R_i}{\partial \theta \partial x}(\theta, x) \right\|$$

(normes dans les espaces correspondants d'applications linéaires ou bilinéaires).

Quitte à changer K , on peut supposer qu'on a également

- (5) $\|A_i(\theta) - A_i(\theta')\| \leq K \|\theta - \theta'\|,$
- (6) $\|A_2^{-1}(\theta) - A_2^{-1}(\theta')\| \leq K \|\theta - \theta'\|.$

Enfin, rappelons

- (7) $\|A_1(\theta)\| \leq b_1, \quad \|A_2^{-1}(\theta)\| \leq b_2,$
- (8) $\|Dg(\theta)\| \leq \alpha_1, \quad \|Dg^{-1}(\theta)\| \leq \alpha_2.$

Rappelons également que nous identifions systématiquement les fonctions sur $T^n \times A$ aux fonctions \mathbb{Z}^n -périodiques sur $\mathbb{R}^n \times A$: tous les calculs sont faits sur le revêtement universel $\mathbb{R}^n \times E$ de $T^n \times E$.

Démonstration du Théorème II-1.6.

II-1.9. Existence de la variété instable $\bar{\mathcal{V}}_2$. Soit

$$A_{\tau, \gamma}^0 = \left\{ \varphi: T^n \times E_2(\tau) \rightarrow E_1 \text{ de classe } C^0, \quad \|\varphi(\theta, x_2)\| \leq \tau \right. \\ \left. \|\varphi(\theta, x_2) - \varphi(\theta', x'_2)\| \leq \|x_2 - x'_2\| + \gamma \|\theta - \theta'\|. \right\}$$

Muni de la topologie C^0 , $A_{\tau, \gamma}^0$ est un espace métrique complet (voir [16], [17]).

Nous allons montrer que, si $\varepsilon, \tau, \gamma, \frac{\tau}{\gamma}$, sont assez petits, \bar{F}' définit une contraction C de $A_{\tau, \gamma}^0$ par la formule

$$\text{graphe}(C\varphi) = \bar{F}'(\text{graphe de } \varphi).$$

II-1.10. Lemme. On peut choisir $\varepsilon, \tau, \gamma$ assez petits pour que, pour tout $\varphi \in A_{\tau, \gamma}^0$ et tout $x_2 \in E_2(\tau)$, l'application $f_{\varphi, x_2}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$f_{\varphi, x_2}(\theta) = g(\theta) + h(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2)$$

soit un lipéomorphisme* de \mathbb{R}^n . En particulier, f_{φ, x_2} définit, en passant au quotient par \mathbb{Z}^n , un lipéomorphisme \tilde{f}_{φ, x_2} de T^n sur T^n .

Démonstration. $f_{\varphi, x_2} - g = h_{\varphi, x_2}$ est défini par

$$h_{\varphi, x_2}(\theta) = h(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2).$$

Les lipéomorphismes étant ouverts dans l'ensemble des applications lipschitziennes de T^n dans T^n et g définissant un lipéomorphisme \bar{g} de T^n , il suffit de montrer que h_{φ, x_2} est petit dans la topologie $C^{0,1}$ de Lipschitz. Puisque

$$(\varphi(\theta, x_2), x_2) \in E(2\tau) \quad \text{si } x_2 \in E_2(\tau),$$

il vient

$$\begin{aligned} \|h(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2)\| &\leq \varepsilon + 2K\tau = \eta, \\ \|h(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2) - h(\theta', \varphi(\theta', x_2), x_2)\| &\leq (\eta + K\gamma)\|\theta - \theta'\| \end{aligned}$$

ce qui démontre le Lemme.

II-1.11. Lemme. On peut choisir $\varepsilon, \tau, \gamma$ assez petits pour que, pour tout $\varphi \in A_{\tau, \gamma}^0$, l'application

$$\Gamma_{\varphi}: \mathbb{R}^n \times E_2(\tau) \rightarrow \mathbb{R}^n \times E_2$$

définie par

$$\Gamma_{\varphi}(\theta, x_2) = (f_{\varphi, x_2}(\theta), A_2(\theta)x_2 + R_2(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2))$$

vérifie $\Gamma_{\varphi}(\mathbb{R}^n \times E_2(\tau)) \supset \mathbb{R}^n \times E_2(\tau)$, et admette sur $\mathbb{R}^n \times E_2(\tau)$ un inverse lipschitzien.

Démonstration. On cherche à résoudre le système

- (i) $\tilde{\theta} = f_{\varphi, x_2}(\theta) = g(\theta) + h(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2)$,
- (ii) $\tilde{x}_2 = A_2(\theta)x_2 + R_2(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2)$.

On résoud (i) par le Lemme précédent; on a les majorations suivantes, en posant

$$\begin{aligned} \theta' = f_{\varphi, x_2}^{-1}(\tilde{\theta}) &= g^{-1}(\tilde{\theta} - h(\theta', \varphi(\theta', x_2'), x_2')), \\ \|\theta - \theta'\| &\leq \alpha_2 \|h(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2) - h(\theta', \varphi(\theta', x_2'), x_2')\| \\ &\leq \alpha_2 \eta \|\theta - \theta'\| + \alpha_2 K(2\|x_2 - x_2'\| + \gamma\|\theta - \theta'\|) \end{aligned}$$

donc

$$\|\theta - \theta'\| \leq P \cdot \|x_2 - x_2'\|$$

avec

$$P = \frac{2\alpha_2 K}{1 - \alpha_2(\eta + K\gamma)}.$$

Pour résoudre (ii) on l'écrit

$$x_2 = A_2(\theta)^{-1} \tilde{x}_2 - A_2(\theta)^{-1} R_2(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2).$$

Si on remplace θ par sa valeur $f_{\varphi, x_2}^{-1}(\tilde{\theta})$ donnée par (i), on obtient

$$x_2 = p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x_2)$$

* C'est-à-dire un homéomorphisme lipschitzien ainsi que son inverse.

que l'on peut résoudre par la méthode du point fixe si $\tilde{x}_2 \in E_2(\tau)$; en effet, si $x_2, \tilde{x}_2 \in E_2(\tau)$, on a

$$\|p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x_2)\| \leq b_2 \tau + 2b_2 \eta \tau = b_2(1 + 2\eta)\tau \quad \text{qui est} \leq \tau \quad \text{si} \quad \eta = \varepsilon + 2K\tau$$

est assez petit (puisque $b_2 < 1$). D'autre part, sous les mêmes hypothèses,

$$\begin{aligned} & \|p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x_2) - p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x'_2)\| \\ & \leq K \|\theta - \theta'\| (\tau + 2\eta\tau) + b_2 [2K\tau \|\theta - \theta'\| + 2\eta \|x_2 - x'_2\| + \eta\gamma \|\theta - \theta'\|] \\ & = [K(1 + 2b_2 + 2\eta)\tau + b_2\eta\gamma] \|\theta - \theta'\| + 2b_2\eta \|x_2 - x'_2\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\|p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x_2) - p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x'_2)\| \leq Q \cdot \|x_2 - x'_2\|$$

avec $Q = 2b_2\eta + PS$, où

$$S = K(1 + 2b_2 + 2\eta)\tau + b_2\eta\gamma = K[1 + 2b_2(1 + \gamma) + 2\eta]\tau + b_2\gamma\varepsilon.$$

Il reste à remarquer que $P = O(1)$, $S = O(\tau + \gamma\varepsilon)$, $Q = O(\tau + \varepsilon)$ lorsque τ et ε tendent vers 0. Il faut encore montrer que

$$\Gamma_\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \times E_2(\tau) \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times E_2(\tau)$$

est lipschitzien: soient $(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), (\tilde{\theta}', \tilde{x}'_2) \in \mathbb{R}^n \times E_2(\tau)$ et

$$(\theta, x_2) = \Gamma_\varphi^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), (\theta', x'_2) = \Gamma_\varphi^{-1}(\tilde{\theta}', \tilde{x}'_2).$$

On a les majorations

$$\begin{aligned} \|\theta - \theta'\| & \leq \alpha_2 \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\| + \alpha_2(\eta + K\gamma) \|\theta - \theta'\| + 2\alpha_2 K \|x_2 - x'_2\|, \\ \|x_2 - x'_2\| & \leq b_2 \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\| + S \|\theta - \theta'\| + 2b_2\eta \|x_2 - x'_2\| \end{aligned}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} \|\theta - \theta'\| & \leq \frac{P}{2K} \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\| + P \|x_2 - x'_2\|, \\ \|x_2 - x'_2\| & \leq \frac{b_2}{1 - 2b_2\eta} \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\| + \frac{S}{1 - 2b_2\eta} \|\theta - \theta'\| \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} \|\theta - \theta'\| & \leq \frac{P(1 - 2b_2\eta)}{2K(1 - Q)} \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\| + \frac{Pb_2}{1 - Q} \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\|, \\ \|x_2 - x'_2\| & \leq \frac{b_2}{1 - Q} \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\| + \frac{PS}{2K(1 - Q)} \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\|. \end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré.

II-1.12. Définissons maintenant C par

$$(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) = A_1(\theta) \varphi(\theta, x_2) + R_1(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2)$$

où $(\theta, x_2) = \Gamma_\varphi^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)$ pour $\tilde{x}_2 \in E_2(\tau)$, et montrons que C applique $A_{\tau, \gamma}^0$ dans lui-même si $\varepsilon, \tau, \gamma, \frac{\tau}{\gamma}$ sont assez petits:

$$\|(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)\| \leq b_1 \tau + 2\eta \tau.$$

Donc $\|(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)\| \leq \tau$ dès que $2\eta < 1 - b_1$

$$\begin{aligned} \|(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) - (C\varphi)(\tilde{\theta}', \tilde{x}'_2)\| &\leq K\tau \|\theta - \theta'\| \\ &\quad + b_1(\|x_2 - x'_2\| + \gamma \|\theta - \theta'\|) + 2K\tau \|\theta - \theta'\| + \eta(2\|x_2 - x'_2\| + \gamma \|\theta - \theta'\|) \\ &= (b_1\gamma + 2K\tau + \eta\gamma) \|\theta - \theta'\| + (b_1 + 2\eta) \|x_2 - x'_2\| \\ &\leq \left[(b_1\gamma + 2K\tau + \eta\gamma) \frac{P(1-2b_2\eta)}{2K(1-Q)} + (b_1 + 2\eta) \frac{PS}{2K(1-Q)} \right] \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\| \\ &\quad + \left[(b_1\gamma + 2K\tau + \eta\gamma) \frac{Pb_2}{1-Q} + (b_1 + 2\eta) \frac{b_2}{1-Q} \right] \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\|. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} \|(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) - (C\varphi)(\tilde{\theta}', \tilde{x}'_2)\| \\ \leq \gamma \left[b_1 \alpha_2 + O\left(\frac{\tau}{\gamma} + \varepsilon + \gamma\right) \right] \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\| + [b_1 b_2 + O(\gamma + \tau + \varepsilon)] \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\|. \end{aligned}$$

Donc $C\varphi \in A_{\tau, \gamma}^0$ dès que $\varepsilon, \tau, \gamma, \frac{\tau}{\gamma}$ sont assez petits.

II-1.13. Montrons enfin que C est une contraction dans l'espace $A_{\tau, \gamma}^0$. Soient $\varphi, \varphi' \in A_{\tau, \gamma}^0$; notons

$$(\theta, x_2) = \Gamma_\varphi^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), \quad (\theta', x'_2) = \Gamma_{\varphi'}^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2).$$

On a les majorations

$$\begin{aligned} \|\theta - \theta'\| &\leq \alpha_2 \eta \|\theta - \theta'\| + \alpha_2 K(2\|x_2 - x'_2\| + \gamma \|\theta - \theta'\| + \|\varphi - \varphi'\|_0), \\ \|x_2 - x'_2\| &\leq S \|\theta - \theta'\| + 2b_2 \eta \|x_2 - x'_2\| + b_2 \eta \|\varphi - \varphi'\|_0, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} \|\theta - \theta'\| &\leq \frac{P}{2} \|\varphi - \varphi'\|_0 + P \|x_2 - x'_2\|, \\ \|x_2 - x'_2\| &\leq \frac{b_2 \eta}{1 - 2b_2 \eta} \|\varphi - \varphi'\|_0 + \frac{S}{1 - 2b_2 \eta} \|\theta - \theta'\| \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\|\theta - \theta'\| \leq \frac{P}{2(1-Q)} \|\varphi - \varphi'\|_0,$$

$$\|x_2 - x_2'\| \leq \frac{Q}{2(1-Q)} \|\varphi - \varphi'\|_0.$$

Enfin

$$\begin{aligned} \|(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) - (C\varphi')(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)\| &\leq K\tau \|\theta - \theta'\| \\ &+ b_1(\|x_2 - x_2'\| + \gamma \|\theta - \theta'\| + \|\varphi - \varphi'\|_0) + 2K\tau \|\theta - \theta'\| \\ &+ \eta(2\|x_2 - x_2'\| + \gamma \|\theta - \theta'\| + \|\varphi - \varphi'\|_0) \\ &= (b_1\gamma + 3K\tau + \eta\gamma) \|\theta - \theta'\| + (b_1 + 2\eta) \|x_2 - x_2'\| + (b_1 + \eta) \|\varphi - \varphi'\|_0 \\ &\leq \left[\frac{(b_1\gamma + 3K\tau + \eta\gamma)P + (b_1 + 2\eta)Q}{2(1-Q)} + b_1 + \eta \right] \|\varphi - \varphi'\|_0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) - (C\varphi')(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)\| \leq (b_1 + O(\tau + \varepsilon + \gamma)) \|\varphi - \varphi'\|_0.$$

L'application C possède donc un unique point fixe $\varphi_2 \in A_{\tau, \gamma}^0$ dès que $\varepsilon, \gamma, \tau, \frac{\tau}{\gamma}$ sont assez petits, et que $b_1 < 1, b_2 < 1, b_1\alpha_2 < 1$. On note \mathcal{V}_2 (resp. $\bar{\mathcal{V}}_2$) le graphe de φ_2 dans $\mathbb{R}^n \times E$ (resp. $T^n \times E$).

Remarquons que le sous-espace fermé de $A_{\tau, \gamma}^0$ formé des φ telles que $\varphi(\theta, 0) \equiv 0$ est invariant par C ; donc $\varphi_2(\theta, 0) \equiv 0$.

Le fait que C soit une contraction dans $A_{\tau, \gamma}^0$ entraîne immédiatement que \mathcal{V}_2 (resp. $\bar{\mathcal{V}}_2$) est localement attractante pour F' (resp. \bar{F}'); plus précisément, si $(\theta, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times E(\tau)$, et si

$$(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = F'(\theta, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times E(\tau),$$

on a

$$\|\tilde{x}_1 - \varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)\| \leq (b_1 + O(\tau + \varepsilon + \gamma)) \|x_1 - \varphi_2(\theta, x_2)\|$$

(le rapport de contraction étant celui de C): il suffit de considérer un $\varphi \in A_{\tau, \gamma}^0$ tel que $x_1 = \varphi(\theta, x_2)$, et tel que $\|\varphi - \varphi_2\|_0 = \|x_1 - \varphi_2(\theta, x_2)\|$.

On en déduit que si $(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^n \times E(\tau)$ vérifie

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists (\theta, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times E(\tau) \text{ tel que } (F')^p(\theta, x_1, x_2) = (\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2),$$

alors $(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathcal{V}_2$.

Réciproquement, si $(\tilde{\theta}, \varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), \tilde{x}_2) \in \mathcal{V}_2$, on a

$$\varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) = (C\varphi_2)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) = A_1(\tilde{\theta})\varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) + R_1(\tilde{\theta}, \varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), \tilde{x}_2),$$

avec $(\theta, x_2) = \Gamma_\varphi^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^n \times E_2(\tau)$ bien déterminé. Ceci s'écrit encore

$$F'(\theta, \varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), \tilde{x}_2) = (\tilde{\theta}, \varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), \tilde{x}_2).$$

$\mathcal{V}_2 \cap \mathbb{R}^n \times E(\tau)$ se caractérise donc comme l'ensemble des $(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^n \times E(\tau)$ tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe

$$(\theta, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times E(\tau) \quad \text{avec} \quad (F')^p(\theta, x_1, x_2) = (\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2).$$

Enfin, si $F'(\theta, \varphi_2(\theta, x_2), x_2) = (\tilde{\theta}, \varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), \tilde{x}_2) \in \mathcal{V}_2$, on a

$$\|x_2\| = \|p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x_2)\| \leq b_2 \|\tilde{x}_2\| + 2b_2 \eta \|x_2\|,$$

donc $\|x_2\| \leq \frac{b_2}{1-2b_2\eta} \|\tilde{x}_2\|$; puisque $\frac{b_2}{1-2b_2\eta} < 1$ si ε et τ sont petits, on voit que, sur \mathcal{V}_2 , $(F')^{-p}(\tilde{\theta}, \varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), \tilde{x}_2)$ tend vers $\mathbb{R}^n \times 0$ lorsque p tend vers $+\infty$.

II-1.14. Lorsque F, F' sont de classe C^k , $k > 2$, on peut remplacer $A_{\tau, \gamma}^0$ par un espace de fonctions $\varphi: T^n \times E_2(\tau) \rightarrow E_1$ de classe C^{k-2} dont les dérivées jusqu'à l'ordre $k-2$ sont bornées en norme $C^{0,1}$ par certaines constantes bien choisies; un tel espace est complet pour la topologie C^{k-2} et des majorations analogues à celles qui précèdent montrent que C définit une contraction de ce nouvel espace pour la topologie C^{k-2} (en fait, il suffit de le montrer pour la topologie C^0 , voir [16]).

Cette technique étant classique, nous nous contentons de renvoyer le lecteur à [16] (pour se persuader du bien fondé des hypothèses, examiner* le cas où $F'(\theta, x_1, x_2) = (g(\theta), A_1 x_1, A_2 x_2)$).

Alternativement, on peut faire comme dans [10] un raisonnement par récurrence en faisant agir F' sur les sections d'un espace de jets.

II-1.15. En ce qui concerne la variété $\tilde{\mathcal{V}}_1$, le raisonnement est le même, le système définissant Γ_φ étant remplacé ici par le système

$$(i) \quad \tilde{\theta} = g(\theta) + h(\theta, x_1, \varphi(\theta, x_1)),$$

$$(ii) \quad \tilde{x}_1 = A_1(\theta)x_1 + R_1(\theta, x_1, \varphi(\theta, x_1))$$

et l'équation du point fixe $\varphi = \varphi_1$ devenant

$$\varphi(\theta, x_1) = A_2^{-1}(\theta)\varphi(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1) - A_2^{-1}(\theta)R_2(\theta, x_1, \varphi(\theta, x_1)).$$

II-1.16. Arrivés là, nous avons démontré le théorème II.1.6. au remplacement près de F' par un itéré $(F')^N$ d'ordre assez élevé. On remarque alors que les points de $F'(\mathcal{V}_1) \cap \mathbb{R}^n \times E(\tau)$ et $F'(\mathcal{V}_2) \cap \mathbb{R}^n \times E(\tau)$ vérifient les mêmes propriétés caractéristiques que les points de $\mathcal{V}_1 \cap \mathbb{R}^n \times E(\tau)$ et $\mathcal{V}_2 \cap \mathbb{R}^n \times E(\tau)$ respectivement (cela vient de ce que F' et F'^{Np} commutent). On en déduit que \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont laissées localement invariantes par F' .

Enfin, si $(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathcal{V}_2$ (par exemple) est assez proche de $\mathbb{R}^n \times 0$, les itérés $(F')^{p-N}(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $0 \leq p \leq N$, sont encore dans \mathcal{V}_2 , et on en déduit immédiatement que tous les itérés $(F')^{-p}(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ sont définis dans \mathcal{V}_2 et tendent vers $\mathbb{R}^n \times 0$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Le théorème II-1.6. est ainsi démontré.

* On applique la technique de démonstration comme si on ne connaissait pas la solution triviale.

II-1.17. *Remarques.* On trouvera dans [6] et [10] des formes plus générales de II-1.6. En particulier, si E est de dimension finie, un argument de lissage de fibré normal remontant à WHITNEY permet de montrer qu'il n'y a pas de perte de différentiabilité sur les variétés invariants.

D'autre part, les hypothèses sur σ_1, σ_2 entraînent automatiquement que $\mathcal{E}_i = \Gamma^0(\xi_i)$, espace des sections continues d'un sous-fibré ξ_i de $T^n \times E$, et le théorème est encore vrai dans cette situation.

Enfin, pour évaluer par exemple les constantes de LIPSCHITZ de $C\varphi$, il suffit de majorer $\|(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) - (C\varphi)(\tilde{\theta}', \tilde{x}'_2)\|$ pour $(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)$ et $(\tilde{\theta}', \tilde{x}'_2)$ assez proches l'un de l'autre. On s'aperçoit alors que, plutôt que $b_1\alpha_2$, c'est la quantité plus locale $\sup_{\theta \in T^n} \|A_1(\theta)\| \|Dg^{-1}(g(\theta))\|$ qui intervient. De telles quantités sont liées aux l -spectrographes de \bar{F} pour $l \geq 1$ (voir les exemples du paragraphe II.2.).

II-1.18. Corollaire de II-1.6. *Sous les hypothèses du théorème II-1.6., le tore $T^n \times 0$ invariant par \bar{F}' est instable si E_2 est non réduit à $\{0\}$.*

II-1.19. *Remarque.* Si on suit les majorations de la démonstration de II-1.6. on constate qu'il existe des constantes $C_i, D_j, 0 \leq i, j \leq k-1$ ayant les propriétés suivantes: le théorème s'applique dès que l'analogue ε_N de ε relatif à $(F')^N$ vérifie des majorations du type

$$\varepsilon_N < \inf \left\{ C_i \left[1 - \left(\frac{\alpha^i}{a} \right)^N \right], D_j \left[1 - \left(\frac{b}{\beta^j} \right)^N \right], 0 \leq i, j \leq k-1 \right\}.$$

Ceci est en particulier vérifié dans le cas suivant que nous rencontrerons plus loin: μ est un paramètre réel positif suffisamment proche de 0; $1-b$ et $a-1$ sont de l'ordre de μ ; $1-\beta, \alpha-1, \varepsilon$ sont des $o(\mu)$.

II-1.20. *Remarque.* On peut refaire la démonstration de II-1.6. en remplaçant l'hypothèse $R'(\theta, 0) \equiv 0$ par l'hypothèse: $R'(\theta, 0)$ est majoré en norme par $\varepsilon_1 \ll \tau$ ainsi que ses dérivées en θ . Ceci démontre la persistance d'un tore T^n invariant pour \bar{F}' . La remarque II-1.17. s'applique encore à cette situation qui est bien connue.

Démonstration du Théorème II-1.7.

II-1.21. Nous commençons par le cas où F et F' sont de classe C^3 . Après avoir éventuellement remplacé F' par $(F')^N$, on se ramène à la situation décrite en II-1.8.; on a en particulier les estimations (1) à (8) avec

$$b_1 < 1, \quad b_1 b_2 < 1, \quad b_1 \alpha_2 < 1.$$

On notera cependant qu'on a supposé $A_2(\theta)$ indépendant de θ et que l'hypothèse $k \geq 3$ permet de remplacer (4) par,

$$(4) \quad \begin{aligned} \|R_i(\theta, x) - R_i(\theta', x)\| &\leq (\varepsilon + K \|x\|) \cdot \|x\| \cdot \|\theta - \theta'\| \\ &\leq 2\eta\tau \|\theta - \theta'\|. \end{aligned}$$

On a supposé que $\left\| \frac{\partial^2 R_i}{\partial \theta \partial x}(\theta, 0) \right\| \leq \varepsilon$, et que $\left\| \frac{\partial^3 R_i}{\partial \theta \partial x^2}(\theta, x) \right\| \leq K$ sur $\mathbb{R}^n \times E(2\tau)$.

On commence par faire le changement de variables

$$(\theta, x) \rightarrow \left(\theta, \frac{1}{\tau} x \right)$$

qui nous ramène au cas où $F' - G$ est petit dans la boule unité; on tronque ensuite par la fonction ρ de l'hypothèse afin d'obtenir une nouvelle application F'' définie sur $\mathbb{R}^n \times E_1(1) \times E_2$ tout entier (c'est une des façons de contourner le problème de l'impossibilité d'une définition locale de C , due à $b_2 \geq 1$).

On définit donc F'' par

$$F''(\theta, x) = G(\theta, x) + \rho(x_2) \left(h(\theta, \tau x), \frac{1}{\tau} R(\theta, \tau x) \right)$$

où $x = (x_1, x_2)$. En particulier $F''(\theta, x) = G(\theta, x)$ pour $\|x_2\| \geq 1$.

Par abus de notations, nous noterons encore

$$F'' = G + H,$$

avec

$$G(\theta, x) = (g(\theta), A(\theta)x), \quad H(\theta, x) = (h(\theta, x), R(\theta, x)).$$

Les estimations (1) à (8) deviennent des estimations valables dans $\mathbb{R}^n \times E_1(1) \times E_2$; par exemple, (1') reste $\|h(\theta, x)\| \leq \eta$ puisque $h(\theta, x) = 0$ pour $\|x_2\| \geq 1$, et que si $\|x_1\| \leq 1$, $\|x_2\| \leq 1$, $\tau(x_1, x_2) \in E(2\tau)$. De même

$$\begin{aligned} \|\rho(x_2)h(\theta, \tau x) - \rho(x'_2)h(\theta, \tau x')\| &\leq \sup \|\rho'(x_2)\| \cdot \|x_2 - x'_2\| \cdot \|h(\theta, \tau x)\| \\ &\quad + \|h(\theta, \tau x) - h(\theta, \tau x')\|. \end{aligned}$$

Quitte à changer K , on peut supposer que $\sup \|\rho'(x_2)\| \leq K$, et (1) devient

$$\|h(\theta, x) - h(\theta, x')\| \leq K(\eta + \tau) \|x - x'\|.$$

Plus généralement, on obtient

- (1) $\|h(\theta, x) - h(\theta, x')\| \leq k(\eta + \tau) \|x - x'\|,$
- (1') $\|h(\theta, x)\| \leq \eta,$
- (2) $\|h(\theta, x) - h(\theta', x)\| \leq \eta \|\theta - \theta'\|,$
- (3) $\|R_i(\theta, x) - R_i(\theta, x')\| \leq (2K + 1)\eta \|x - x'\|,$
- (3') $\|R_i(\theta, x)\| \leq \inf(\eta \|x\|, 2\eta),$
- (4) $\|R_i(\theta, x) - R_i(\theta', x)\| \leq 2\eta \|\theta - \theta'\|.$

Par conséquent, étant donné $\lambda > 0$, on peut assurer, si ε et τ sont assez petits, que les majorations ci-dessous ont lieu dans tout $\mathbb{R}^n \times E_1(1) \times E_2$

- (1) $\|h(\theta, x) - h(\theta, x')\| \leq \lambda \|x - x'\|,$
- (1') $\|h(\theta, x)\| \leq \lambda,$
- (2) $\|h(\theta, x) - h(\theta', x)\| \leq \lambda \|\theta - \theta'\|,$

- (3) $\|R_i(\theta, x) - R_i(\theta, x')\| \leq \lambda \|x - x'\|,$
- (3') $\|R_i(\theta, x)\| \leq \inf(\lambda \|x\|, \lambda),$
- (4') $\|R_i(\theta, x) - R_i(\theta', x)\| \leq \lambda \|\theta - \theta'\|.$

La démonstration se poursuit maintenant de façon analogue à celle du Théorème II-1.6. avec l'espace fonctionnel

$$A_{M,1,1}^0 = \left\{ \begin{array}{l} \varphi: T^n \times E_2 \rightarrow E_1 \text{ de classe } C^0, \|\varphi(\theta, x_2)\| \leq M, \\ \|\varphi(\theta, x_2) - \varphi(\theta', x'_2)\| \leq \|\theta - \theta'\| + \|x_2 - x'_2\| \end{array} \right.$$

qui est métrique complet pour la norme C^0 .

II-1.22 Lemme. *On peut choisir λ assez petit pour que, pour tout $\varphi \in A_{M,1,1}^0$ ($M \leq 1$) et tout $x_2 \in E_2$, l'application $f_{\varphi, x_2}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par*

$$f_{\varphi, x_2}(\theta) = g(\theta) + h(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2)$$

soit un lipéomorphisme de \mathbb{R}^n .

Démonstration (comparer à celle de II-1.10.).

$$\begin{aligned} \|h(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2)\| &\leq \lambda, \\ \|h(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2) - h(\theta', \varphi(\theta', x_2), x_2)\| \\ &\leq \lambda(\|\theta - \theta'\| + \|\varphi(\theta, x_2) - \varphi(\theta', x_2)\|) \\ &\leq 2\lambda \|\theta - \theta'\|. \end{aligned}$$

II-1.23. Lemme. *On peut choisir λ assez petit pour que, pour tout $\varphi \in A_{M,1,1}^0$, l'application*

$$\Gamma_\varphi: \mathbb{R}^n \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}^n \times E_2,$$

définie par

$$\Gamma_\varphi(\theta, x_2) = (f_{\varphi, x_2}(\theta), A_2(\theta)x_2 + R_2(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2))$$

soit un lipéomorphisme.

Démonstration (comparer à celle de II-1.11.). On cherche à résoudre le système

- (i) $\begin{cases} \tilde{\theta} = f_{\varphi, x_2}(\theta) = g(\theta) + h(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2), \\ \tilde{x}_2 = A_2 x_2 + R_2(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2). \end{cases}$
- (ii)

On résoud (i) par le lemme précédent; on a les majorations suivantes, en posant

$$\begin{aligned} \theta' = f_{\varphi, x_2}^{-1}(\tilde{\theta}) &= g^{-1}(\tilde{\theta} - h(\theta', \varphi(\theta', x'_2), x'_2)): \\ \|\theta - \theta'\| &\leq \alpha_2 \lambda (2 \|\theta - \theta'\| + 2 \|x_2 - x'_2\|) \end{aligned}$$

donc

$$\|\theta - \theta'\| \leq 2\lambda P \cdot \|x_2 - x'_2\|,$$

avec

$$P = \frac{\alpha_2}{1 - 2\alpha_2 \lambda} = \alpha_2 + O(\lambda).$$

Comme en II-1.11., (ii) s'écrit $x_2 = p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x_2)$ que l'on résoud par la méthode du point fixe pour tout $\tilde{x}_2 \in E_2$; en effet

$$\begin{aligned} \|p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x_2) - p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x'_2)\| &\leq b_2 \lambda (2 \|\theta - \theta'\| + 2 \|x_2 - x'_2\|) \\ &\leq 2b_2 \lambda (2\lambda P + 1) \|x_2 - x'_2\|. \end{aligned}$$

Il reste à voir que Γ_φ^{-1} est lipschitzien (pour Γ_φ c'est évident): Soient $(\theta, x_2), (\theta', x'_2) \in \mathbb{R}^n \times E_2$, et

$$\begin{aligned} (\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) &= \Gamma_\varphi(\theta, x_2), \quad (\tilde{\theta}', \tilde{x}'_2) = \Gamma_\varphi(\theta', x'_2) \\ \|\theta - \theta'\| &\leq \alpha_2 \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\| + \alpha_2 \lambda (2 \|\theta - \theta'\| + 2 \|x_2 - x'_2\|), \\ \|x_2 - x'_2\| &\leq b_2 \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\| + b_2 \lambda (2 \|\theta - \theta'\| + 2 \|x_2 - x'_2\|) \end{aligned}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} \|\theta - \theta'\| &\leq P \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\| + 2\lambda P \|x_2 - x'_2\|, \\ \|x_2 - x'_2\| &\leq S \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\| + 2\lambda S \|\theta - \theta'\| \\ &\left(\text{avec } S = \frac{b_2}{1 - 2b_2\lambda} = b_2 + O(\lambda) \right) \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} \|\theta - \theta'\| &\leq \frac{P}{1 - 4\lambda^2 PS} \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\| + \frac{2\lambda PS}{1 - 4\lambda^2 PS} \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\|, \\ \|x_2 - x'_2\| &\leq \frac{S}{1 - 4\lambda^2 PS} \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\| + \frac{2\lambda PS}{1 - 4\lambda^2 PS} \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\|. \end{aligned}$$

Remarquons que c'est dans ce lemme qu'intervient l'indépendance de A_2 par rapport à θ .

II-1.24. Définissons comme auparavant C par

$$(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) = A_1(\theta)\varphi(\theta, x_2) + R_1(\theta, \varphi(\theta, x_2), x_2)$$

où

$$(\theta, x_2) = \Gamma_\varphi^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)$$

et montrons que C applique $A_{M,1,1}^0$ dans lui-même si $\lambda, M, \lambda/M$ sont assez petits:

$$\begin{aligned} \|(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)\| &\leq b_1 M + \lambda \quad \text{exige } \lambda \leq (1 - b_1)M, \\ \|(C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) - (C\varphi)(\tilde{\theta}', \tilde{x}'_2)\| &\leq KM \|\theta - \theta'\| + b_1 (\|\theta - \theta'\| + \|x_2 - x'_2\|) + \lambda (2 \|x_2 - x'_2\| + 2 \|\theta - \theta'\|) \\ &= (KM + b_1 + 2\lambda) \|\theta - \theta'\| + (b_1 + 2\lambda) \|x_2 - x'_2\| \\ &\leq \frac{1}{1 - 4\lambda^2 PS} [(KM + b_1 + 2\lambda)P + (b_1 + 2\lambda)2\lambda PS] \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\| \\ &\quad + \frac{1}{1 - 4\lambda^2 PS} [(KM + b_1 + 2\lambda)2\lambda PS + (b_1 + 2\lambda)S] \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\|. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} & \| (C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) - (C\varphi)(\tilde{\theta}', \tilde{x}'_2) \| \\ & \leq [b_1 \alpha_2 + O(\lambda + M)] \|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'\| + [b_1 b_2 + O(\lambda)] \|\tilde{x}_2 - \tilde{x}'_2\|. \end{aligned}$$

Donc $C\varphi \in A_{M,1,1}^0$ si $\lambda, M, \lambda/M$ sont assez petits.

II-1.25. Montrons enfin que C est une contraction dans l'espace $A_{M,1,1}^0$ muni de la norme C^0 . Soient $\varphi, \varphi' \in A_{M,1,1}^0$; notons

$$(\theta, x_2) = \Gamma_\varphi^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), \quad (\theta', x'_2) = \Gamma_{\varphi'}^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)$$

on a les majorations

$$\begin{aligned} \|\theta - \theta'\| & \leq \alpha_2 \lambda (2 \|\theta - \theta'\| + 2 \|x_2 - x'_2\| + \|\varphi - \varphi'\|_0), \\ \|x_2 - x'_2\| & \leq b_2 \lambda (2 \|\theta - \theta'\| + 2 \|x_2 - x'_2\| + \|\varphi - \varphi'\|_0), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \|\theta - \theta'\| & \leq 2\lambda P \|x_2 - x'_2\| + \lambda P \|\varphi - \varphi'\|_0, \\ \|x_2 - x'_2\| & \leq 2\lambda S \|\theta - \theta'\| + \lambda S \|\varphi - \varphi'\|_0 \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} \|\theta - \theta'\| & \leq \frac{\lambda P (1 + 2\lambda S)}{1 - 4\lambda^2 P S} \|\varphi - \varphi'\|_0, \\ \|x_2 - x'_2\| & \leq \frac{\lambda S (1 + 2\lambda P)}{1 - 4\lambda^2 P S} \|\varphi - \varphi'\|_0. \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} & \| (C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) - (C\varphi')(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) \| \\ & \leq KM \|\theta - \theta'\| + b_1 (\|\theta - \theta'\| + \|x_2 - x'_2\| + \|\varphi - \varphi'\|_0) \\ & \quad + \lambda (2 \|\theta - \theta'\| + 2 \|x_2 - x'_2\| + \|\varphi - \varphi'\|_0) \\ & = (KM + b_1 + 2\lambda) \|\theta - \theta'\| + (b_1 + 2\lambda) \|x_2 - x'_2\| + (b_1 + \lambda) \|\varphi - \varphi'\|_0 \\ & \leq \left\{ \frac{\lambda}{1 - 4\lambda^2 P S} [(KM + b_1 + 2\lambda) P (1 + 2\lambda S) \right. \\ & \quad \left. + (b_1 + 2\lambda) S (1 + 2\lambda P)] + b_1 + \lambda \right\} \|\varphi - \varphi'\|_0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\| (C\varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) - (C\varphi')(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2) \| \leq [b_1 + O(\lambda)] \|\varphi - \varphi'\|_0.$$

L'application C possède donc un unique point fixe φ_2 dans $A_{M,1,1}^0$ si $\lambda, M, \lambda/M$ sont assez petits.

Ici encore, le sous-espace de $A_{M,1,1}^0$ formé des φ telles que $\varphi(\theta, 0) \equiv 0$ est invariant par C , donc $\varphi_2(\theta, 0) \equiv 0$.

Toujours comme en II-1.6., le fait que C soit une contraction dans $A_{M,1,1}^0$ entraîne que le graphe \mathcal{V}_2'' de φ_2 dans $\mathbb{R}^n \times E$ (resp. le graphe \mathcal{V}_2'' de φ_2 dans

$T^n \times E$ est attractant pour F'' (resp. \bar{F}''): plus précisément, si

$$(\theta, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2,$$

et si

$$(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = F''(\theta, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2,$$

on a

$$\|\tilde{x}_1 - \varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2)\| \leq [b_1 + O(\lambda)] \|x_1 - \varphi_2(\theta, x_2)\|$$

(le rapport de contraction étant celui de C).

On déduit de ce qui précède que, si $(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2$ vérifie:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists (\theta, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2$$

tel que $(F'')^p(\theta, x_1, x_2) = (\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, alors $(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathcal{V}_2''$. Réciproquement, en écrivant $C\varphi_2 = \varphi_2$, on montre que les points de \mathcal{V}_2'' ont cette propriété (avec $(\theta, x_1, x_2) \in \mathcal{V}_2''$).

\mathcal{V}_2'' se caractérise donc comme l'ensemble des

$$(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2$$

tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe

$$(\theta, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2 \quad \text{avec} \quad (F'')^p(\theta, x_1, x_2) = (\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2).$$

Enfin, si $F''(\theta, \varphi_2(\theta, x_2), x_2) = (\tilde{\theta}, \varphi_2(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2), \tilde{x}_2) \in \mathcal{V}_2''$, on a

$$\|x_2\| = \|p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_2, x_2)\| \leq b_2 \|\tilde{x}_2\| + b_2 \lambda (\|x_2\| + \|\varphi_2(\theta, x_2)\|)$$

mais

$$\|\varphi_2(\theta, x_2)\| \leq \|\varphi_2(\theta, 0)\| + \|x_2\| = \|x_2\|$$

donc $\|x_2\| \leq \frac{b_2}{1 - 2b_2\lambda} \|\tilde{x}_2\|$, d'où on déduit $b_1 \|x_2\| \leq r \|\tilde{x}_2\|$, $r = \frac{b_1 b_2}{1 - 2b_2\lambda} < 1$.

On en déduit que, si $(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathcal{V}_2''$, et si

$$(F''|_{\mathcal{V}_2''})^p(\tilde{\theta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\theta_p, (x_1)_p, (x_2)_p) \in \mathcal{V}_2'', \quad \text{on a} \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} b_1^p (x_2)_p = 0;$$

autrement dit les points de \mathcal{V}_2'' ont des itérés négatifs sur \mathcal{V}_2'' dont la distance à $\mathbb{R}^n \times 0$ croît moins vite que la suite b_1^{-p} .

II-1.26. En ce qui concerne la régularité, nous ne serons pas plus prolixes que pour le Théorème II-1.6.; encore une fois, le bien-fondé des hypothèses apparaît déjà sur le cas où

$$F'(\theta, x_1, x_2) = (g(\theta), A_1 x_1, A_2 x_2).$$

II-1.27. On déduit de \mathcal{V}_2'' (par le changement de variable $(\theta, x) \rightarrow (\theta, \tau x)$) une sous-variété \mathcal{V}_2 de $\mathbb{R}^n \times E$ contenant $\mathbb{R}^n \times 0$ qui est localement invariante par F' , et localement attractante pour F' . Bien entendu, on a perdu en route l'unicité (choix de τ et de ρ).

II-1.28. Il nous reste à passer de $(F')^N$ à F' , ce qui est légèrement plus délicat que dans le cas hyperbolique.

Tout d'abord, au lieu de modifier $(F')^N$ pour obtenir F'' , on modifie F' en F'' et on travaille avec $(F'')^N$. (Remarquer qu'il faut tronquer F' en x_2 assez près de 0 pour que $(F'')^N(\theta, x) = G^N(\theta, x)$ si $\|x_2\| \geq 1$). Il est possible de procéder ainsi car N est déterminé par la seule donnée de G .

Etant donnés M et λ assez petits (avec $\frac{\lambda}{M}$ assez petit), on obtient donc un F'' et une sous-variété \mathcal{V}_2'' de $\mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2$ invariante par $(F'')^N$.

Bien entendu $F''(\mathcal{V}_2'')$ n'a à priori aucune raison d'être contenue dans $\mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2$, mais si λ est assez petit il existe M' tel que

$$F''(\mathbb{R}^n \times E_1(M') \times E_2) \subset \mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2.$$

On choisit λ assez petit* pour que $(F'')^N$ définisse une contraction C non seulement dans $A_{M,1,1}^0$ mais aussi dans $A_{M',1,1}^0$. On a alors

$$\mathcal{V}_2'' \subset \mathbb{R}^n \times E_1(M') \times E_2,$$

et donc $F''(\mathcal{V}_2'') \subset \mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2$.

Puisque F'' commute avec $(F'')^N$ (c'est pour avoir ceci qu'on a commencé par modifier F' au lieu de modifier directement $(F')^N$), on voit que les points de $F''(\mathcal{V}_2'')$ vérifient la propriété caractéristique des points de \mathcal{V}_2'' (considérée comme définie par la contraction C de $A_{M,1,1}^0$), et donc $F''(\mathcal{V}_2'') = \mathcal{V}_2''$.

On en déduit que \mathcal{V}_2'' est localement invariante par F'' .

En ce qui concerne le caractère attractant de \mathcal{V}_2'' pour F'' , on fait le même type de raisonnement, en s'arrangeant cette fois-ci pour choisir M' et λ assez petits pour que

$$\forall 0 \leq p \leq N-1, \quad (F'')^p(\mathbb{R}^n \times E_1(M') \times E_2) \subset \mathbb{R}^n \times E_1(M) \times E_2.$$

Les itérés $(F'')^{p+qN}(\theta, x_1, x_2)$ d'un point de $\mathbb{R}^n \times E_1(M') \times E_2$ tendent donc vers \mathcal{V}_2'' lorsque q tend vers $+\infty$, ce qui montre que $(F'')^q(\theta, x_1, x_2)$ tend vers \mathcal{V}_2'' lorsque r tend vers $+\infty$.

On en déduit que \mathcal{V}_2'' est localement attractante pour F'' , ce qui termine la démonstration du Théorème II-1.7.

II-1.29. *Remarque.* Dans II-1.6. et II-1.7., les hypothèses spectrales sur $\tau(\bar{g})$ n'interviennent plus si $\bar{g}: T^n \rightarrow T^n$ est C^1 -conjugué à une rotation $(\theta_1, \dots, \theta_n) \mapsto (\theta_1 + \alpha_1, \dots, \theta_n + \alpha_n)$.

En effet, $S_0(\tau(\bar{g}))$ est alors contenu dans le cercle unité.

Le paragraphe suivant donne des résultats beaucoup plus précis lorsque $n = 1$.

II-2. Le cas particulier d'un difféomorphisme de $T^1 \times \mathbb{R}$ au voisinage de $T^1 \times 0$

II-2.1. *Notations.* $\bar{F}: T^1 \times \mathbb{R}, T^1 \times 0 \rightarrow T^1 \times \mathbb{R}, T^1 \times 0$ est, au voisinage de $T^1 \times 0$, un difféomorphisme de classe C^k ; on lui associe F, G, \bar{G} comme au paragraphe précédent; en particulier

* Remarque que ceci rend d'autant plus locale la variété \mathcal{V}_2'' qui nous intéresse.

s'écrit

$$G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$G(\theta, x) = (g(\theta), a(\theta)x),$$

où g est un relèvement de $\bar{g} \in \text{Diff}_0^k(T^1)$, et où $a: T^1 \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction de classe C^{k-1} .

Soient $a_p, b_p: T^1 \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions de classe C^{k-1} définies par

$$a_p(\theta) = \prod_{i=0}^{p-1} a(g^i(\theta)), \quad b_p(\theta) = a_p(g^{-p}(\theta)) = \prod_{i=1}^p a(g^{-i}(\theta)).$$

On a les formules

$$G^p(\theta, x) = (g^p(\theta), a_p(\theta)x)$$

$$(\mathcal{A}^p X)(\theta) = b_p(\theta) X(g^{-p}(\theta)).$$

Lorsqu'on parle du l -spectrographe de \bar{F} , on sous-entend que $k \geq l + 1$. Enfin, comme précédemment, on ne distinguera pas entre fonctions de T^1 dans \mathbb{R} et fonctions \mathbb{Z} -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Nous envisagerons successivement le cas où \bar{g} est structurellement stable (c'est le cas générique au sens de la catégorie de BAIRE; voir [2]) et le cas où le nombre de rotation de \bar{g} est irrationnel (c'est un cas fréquent au sens de la mesure, voir [2] et [9]).

Dans le premier cas, le spectrographe de $\tau(\bar{g})$ peut contenir toute une couronne; dans le deuxième il est inclus dans le cercle unité.

II-2.2. Cas où \bar{g} est structurellement stable. \bar{g} possède alors un nombre fini de cycles stables de points périodiques alternant avec un nombre égal de cycles instables (voir [2]); la période commune est q si le nombre de rotation de \bar{g} s'écrit sous forme irréductible $\rho(\bar{g}) = \frac{m}{q}$. Tous les points périodiques de $(\bar{g})^q$ sont donc fixes. On notera

$$\text{Per}(\bar{g}) = \text{Per}_s(\bar{g}) \cup \text{Per}_I(\bar{g})$$

l'ensemble des points périodiques de \bar{g} décomposé en points fixes stables de $(\bar{g})^q$ et points fixes instables de $(\bar{g})^q$.

II-2.3. Lemme. *Sous les hypothèses qui précèdent, le 0-spectrographe de \bar{F} est borné par*

$$s_0(\bar{F}) = \left[\sup_{\theta \in \text{Per}(\bar{g})} a_q(\theta) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad i_0(\bar{F}) = \left[\inf_{\theta \in \text{Per}(\bar{g})} a_q(\theta) \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Le 1-spectrographe de \bar{F} est borné par

$$s_1(\bar{F}) = \left[\sup_{\theta \in \text{Per}(\bar{g})} (\sup(a_q(\theta), a_q(\theta) Dg^{-q}(\theta))) \right]^{\frac{1}{q}},$$

$$i_1(\bar{F}) = \left[\inf_{\theta \in \text{Per}(\bar{g})} (\inf(a_q(\theta), a_q(\theta) Dg^{-q}(\theta))) \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration (esquisse).

$$s_0(\bar{F}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|\mathcal{A}^p\|_0^{\frac{1}{p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\sup_{\theta \in T^1} b_p(\theta))^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} (\sup_{\theta \in T^1} a_p(\theta))^{\frac{1}{p}} \geq \lim_{p \rightarrow +\infty} (\sup_{\theta \in \text{Per}(\bar{g})} a_p(\theta))^{\frac{1}{p}};$$

en écrivant $p = dq + r$, $0 \leq r < q$, on voit immédiatement que la dernière limite est exactement $\left[\sup_{\theta \in \text{Per}(\bar{g})} a_q(\theta) \right]^{\frac{1}{q}}$.

Pour montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $s_0(\bar{F}) < \left[\sup_{\theta \in \text{Per}(\bar{g})} a_q(\theta) \right]^{\frac{1}{q}} + \varepsilon$, on utilise le fait que, si $\theta \notin \text{Per}_I(\bar{g})$, la distance de $(\bar{g})^p(\theta)$ à $\text{Per}_S(\bar{g})$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini; on en déduit un découpage du cercle...

L'assertion concernant $i_0(\bar{F})$ se déduit évidemment de celle concernant $s_0(\bar{F})$ en considérant l'opérateur inverse.

Dans la topologie C^1 , il faut travailler un peu plus; on calcule*

$$D(\mathcal{A}^p X)(\theta) = Db_p(\theta) \cdot X(g^{-p}(\theta)) + b_p(\theta) \cdot DX(g^{-p}(\theta)) \cdot Dg^{-p}(\theta),$$

$$Db_p(\theta) = b_p(\theta) \cdot \sum_{i=1}^p D \text{Log } a(g^{-i}(\theta)) \cdot Dg^{-i}(\theta).$$

Posons $L(\theta) = \sum_{i=1}^q D \text{Log } a(g^{-i}(\theta)) \cdot Dg^{-i}(\theta)$; si $p = dq + r$, $0 \leq r < q$ et si $\theta \in \text{Per}(\bar{g})$, on a $Dg^p(\theta) = Dg^r(\theta) \cdot (Dg^q(\theta))^d$,

$$D \text{Log } a(g^{-(i+dq)}(\theta)) \cdot Dg^{-(i+dq)}(\theta) = D \text{Log } a(g^{-i}(\theta)) \cdot Dg^{-i}(\theta) \cdot (Dg^{-q}(\theta))^d,$$

et donc

$$\frac{Db_p(\theta)}{b_p(\theta)} = L(\theta) \cdot \sum_{j=0}^{d-1} (Dg^{-1}(\theta))^j + (Dg^{-q}(\theta))^d \sum_{i=1}^r D \text{Log } a(g^{-i}(\theta)) \cdot Dg^{-i}(\theta).$$

Rappelons que

$$Dg^{-q}(\theta) < 1 \quad \text{si } \theta \in \text{Per}_I(\bar{g})$$

$$Dg^{-q}(\theta) > 1 \quad \text{si } \theta \in \text{Per}_S(\bar{g}).$$

Si $\theta \in \text{Per}_I(\bar{g})$, on voit que

$$\frac{Db_p(\theta)}{b_p(\theta)} = L(\theta) \cdot \frac{1 - (Dg^{-q}(\theta))^d}{1 - Dg^{-q}(\theta)} + (Dg^{-q}(\theta))^d \cdot \sum_{i=1}^r D \text{Log } a(g^{-i}(\theta)) \cdot Dg^{-i}(\theta)$$

est uniformément borné lorsque p tend vers $+\infty$ (c'est clair géométriquement).

Si $\theta \in \text{Per}_S(\bar{g})$, on voit que,

$$\begin{aligned} \frac{Db_p(\theta)}{b_p(\theta) \cdot (Dg^{-q}(\theta))^d} &= L(\theta) \cdot (Dg^{-q}(\theta))^{-1} \cdot \frac{1 - (Dg^{-q}(\theta))^{-d}}{1 - (Dg^{-q}(\theta))^{-1}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^r D \text{Log } a(g^{-i}(\theta)) \cdot Dg^{-i}(\theta) \end{aligned}$$

est uniformément borné lorsque p tend vers $+\infty$;

* Afin de ne pas surcharger la typographie nous avons supprimé quelques parenthèses: $DX(g^{-n}(\theta))$ signifie par exemple la dérivée de X au point $g^{-n}(\theta)$ et non pas la dérivée de la fonction $X(g^{-n}(\theta))$.

On peut donc affirmer que, si $\theta \in \text{Per}(\bar{g})$, les quantités suivantes sont uniformément bornées lorsque p tend vers $+\infty$:

$$\frac{b_p(\theta)}{(b_q(\theta)^q)^p}, \quad \frac{b_p(\theta) \cdot Dg^{-p}(\theta)}{(b_q(\theta)^q \cdot Dg^{-q}(\theta)^q)^p}, \quad \frac{Db_p(\theta)}{(b_q(\theta)^q)^p}, \quad \text{si } \theta \in \text{Per}_I(\bar{g}),$$

$$\frac{Db_p(\theta)}{(b_q(\theta)^q \cdot Dg^{-q}(\theta)^q)^p} \quad \text{si } \theta \in \text{Per}_S(\bar{g}).$$

En utilisant l'identité $\lim_{p \rightarrow +\infty} (ak^p + bl^p)^{\frac{1}{p}} = \sup(k, l)$ et en se ramenant aux points périodiques par un raisonnement analogue au cas C^0 , on en déduit l'assertion sur $s_1(\bar{F})$. L'assertion sur $i_1(\bar{F})$ suit du passage à l'inverse (remarquer bien entendu que si $\theta \in \text{Per}(\bar{g})$, $a_q(\theta) = b_q(\theta)$).

II-2.4. Remarque. Nous allons voir que $S_I(\bar{F})$ peut, dans le cas où \bar{g} est structurellement stable, contenir toute une couronne.

Nous considérons simplement le cas où $\text{Per}(\bar{g})$ est formé de deux points fixes, l'un stable θ_S , l'autre instable θ_I ($q=1$): cela ne change rien d'essentiel mais simplifie beaucoup les notations et l'énoncé des lemmes. Soit $\lambda \in S_0(\bar{F})$ une valeur propre et $x(\theta)$ un vecteur propre associé: $x(g(\theta)) = \frac{a(\theta)}{\lambda} x(\theta)$. Si $\theta \in \text{Per}(\bar{g})$,

$x(\theta) \left[1 - \frac{a(\theta)}{\lambda} \right] = 0$. D'autre part, pour tout $\theta \in T^1$ on doit avoir:

$$x(g^p(\theta)) = \frac{a_p(\theta)}{\lambda^p} x(\theta), \quad x(g^{-p}(\theta)) = \frac{\lambda^p}{b_p(\theta)} x(\theta).$$

Soit $\theta_0 \notin \text{Per}(\bar{g})$ tel que $x(\theta_0) \neq 0$; si $p \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\frac{a_p(\theta_0)}{\lambda^p} \rightarrow \frac{x(\theta_S)}{x(\theta_0)} < +\infty, \quad \frac{\lambda^p}{b_p(\theta_0)} \rightarrow \frac{x(\theta_I)}{x(\theta_0)} < +\infty$$

ce qui implique manifestement

$$a(\theta_S) \leq \lambda \leq a(\theta_I).$$

II-2.5. Lemme. Dans l'exemple ci-dessus, si $a(\theta_S) < a(\theta_I)$, $S_0(\bar{F})$ coïncide avec la couronne

$$\{z \in \mathbb{C} \mid a(\theta_S) \leq |z| \leq a(\theta_I)\}.$$

Démonstration. En vertu de II-2.3., il suffit de montrer que la couronne ouverte est formée de valeurs propres.

Pour cela, étant donné $\lambda \in \mathbb{C}$, $a(\theta_S) < |\lambda| < a(\theta_I)$, on construit $x(\theta)$ dans chacun des deux demi-cercles limités par θ_S et θ_I , vérifiant $x(\theta_S) = x(\theta_I) = 0$: il suffit de se donner $x(\theta)$ sur un «domaine fondamental» (figure 1), nul aux deux extrémités du domaine, et de prolonger x en une fonction continue sur le demi-cercle

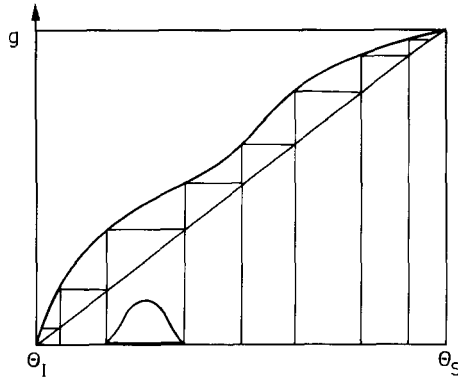


Fig. 1

ouvert par la formule $x(g(\theta)) = \frac{a(\theta)}{\lambda} x(\theta)$; la condition sur $|\lambda|$ assure que le prolongement par $x(\theta_S) = x(\theta_I) = 0$ définit une fonction continue sur le demi-cercle fermé.

II-2.6. *Remarques.* (i) Même si la condition du lemme n'est pas vérifiée, les points $\lambda = a(\theta_S)$ et $\lambda = a(\theta_I)$ sont dans $S_l(\bar{F})$ pour tout l , car $\lambda \text{Id} - \mathcal{A}$ n'est pas surjectif (regarder en θ_S et θ_I).

(ii) On peut jouer à un jeu analogue dans le cas de $S_1(\bar{F})$ et trouver un cas où celui-ci contient la couronne

$$\{z \in \mathbb{C} \mid a(\theta_S) \cdot Dg^{-1}(\theta_S) \leq |z| \leq a(\theta_I) \cdot Dg^{-1}(\theta_I)\}.$$

II-2.7. *Remarque sur le lemme II-2.3.* $\text{Log}_{S_0}(\bar{F}) = \sup_v \int_{T^1} (\text{Log } a) d\nu$, où le sup est pris sur l'ensemble (fini ici) des mesures de probabilités ν sur T^1 invariantes par \bar{g} . Il était évident *a priori* que $\text{Log}_{S_0}(\bar{F})$ était plus grand ou égal à ce sup, puisque

$$\text{Log}(\sup_{\theta \in T^1} a_p(\theta))^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \sup_{\theta \in T^1} \text{Log } a_p(\theta) \geq \frac{1}{p} \int_{T^1} (\text{Log } a_p) d\nu = \int_{T^1} (\text{Log } a) d\nu,$$

où ν est n'importe quelle mesure de probabilité sur T^1 invariante par \bar{g} .

II-2.8. *Cas où le nombre de rotation de \bar{g} est irrationnel.* Rappelons que si $\bar{g} \in \text{Diff}_0^0(T^1)$ a un nombre de rotation irrationnel, il est «uniquement ergodique» (voir [8] chap. II §8): cela signifie qu'il existe une unique mesure de probabilité ν sur T^1 invariante par \bar{g} , et implique en particulier que, pour toute fonction continue $\varphi: T^1 \rightarrow \mathbb{R}$, la suite de fonctions $\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \varphi \circ g^i$ converge uniformément vers la constante $\int_{T^1} \varphi d\nu$.

II-2.9. **Lemme.** *Si le nombre de rotation de \bar{g} est irrationnel, le l -spectrographe de \bar{F} est contenu dans le cercle de centre 0 et de rayon*

$$\exp \int_{T^1} (\text{Log } a) d\nu$$

si de plus $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_\omega \circ \bar{h}$, $\bar{h} \in \text{Diff}_0^l(T^1)$, le l -spectrographe de \bar{F} coïncide avec ce cercle.

Démonstration. D'après ce que nous venons de rappeler, la suite de fonctions $\frac{1}{p} \text{Log } a_p(\theta) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \text{Log } a(g^i(\theta))$ converge uniformément vers $A = \int_{T^1} (\text{Log } a) d\nu$. On en déduit immédiatement que

$$s_0(\bar{F}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\theta \in T^1} a_p(\theta) \right)^{\frac{1}{p}} = \exp A = i_0(\bar{F}).$$

Si $l=1$, on reprend les formules donnant $D(\mathcal{A}^p X)(\theta)$ et $D b_p(\theta)$ (voir démonstration de II-2.3.). La remarque essentielle est que $\int_{T^1} (\text{Log } Dg) d\nu = 0$ (voir [8] chap. VI §1) qui entraîne la convergence uniforme vers 0 de la suite de fonctions $\frac{1}{p} \text{Log } Dg^p = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} (\text{Log } Dg)(g^i)$, c'est-à-dire la croissance sous-exponentielle des Dg^p ; on en déduit facilement que $s_1(\bar{F}) = \exp A = i_1(\bar{F})$.

Enfin, dans le cas général, il est facile de montrer par récurrence que, pour tout l , la croissance des $D^l g^p$ est sous-exponentielle; on en déduit que $s_l(\bar{F}) = \exp A = i_l(\bar{F})$, le seul terme important restant $b_p(\theta)$.

Dans le cas où $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_\omega \circ \bar{h}$, $\bar{h} \in \text{Diff}_0^l(T^1)$, montrons que si $\lambda \in S_l(\bar{F})$, alors $\lambda e^{-2i\pi p\omega} \in S_l(\bar{F})$: ceci permet de conclure puisque $S_l(\bar{F})$ est non vide et fermé, et que ω n'est pas rationnel. La démonstration se ramène à la remarque suivante: l'équation

$$\lambda X(\theta) - a(g^{-1}(\theta)) X(g^{-1}(\theta)) = Y(\theta)$$

équivalent, si $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_\omega \circ \bar{h}$, à l'équation

$$\lambda e^{-2i\pi p\omega} X(\theta) e^{2i\pi p\theta} - a(g^{-1}(\theta)) X(g^{-1}(\theta)) e^{2i\pi p\theta(g^{-1}(\theta))} = Y(\theta) e^{2i\pi p\theta(g^{-1}(\theta))}.$$

II-2.10. Corollaire. Si $\bar{g} \in \text{Diff}_0^k(T^1)$, $k \geq 1$, a un nombre de rotation irrationnel, et si $0 \leq l \leq k-1$, le l -spectrographe de $\tau(\bar{g})$ est contenu dans le cercle unité de \mathbb{C} .

Démonstration. On a rappelé ci-dessus que $\int_{T^1} (\text{Log } Dg) d\nu = 0$.

II-2.11. Remarque sur la comparaison des stabilités de $T^1 \times 0$ pour \bar{F} et \bar{G} . Le cercle $T^1 \times 0$ est asymptotiquement stable pour \bar{G} si et seulement si la suite de fonctions a_p converge simplement vers 0. Remarquons que la convergence uniforme vers 0 de la même suite (ou de la suite b_p , ce qui est équivalent) équivaut à la stabilité asymptotique de l'origine pour $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0(T^1; \mathbb{R}))$ qui est elle-même impliquée par la propriété $s_0(\bar{F}) < 1$.

II-2.12. Lemme. On suppose que $\bar{g} \in \text{Diff}_0^2(T^1)$ est, ou bien structurellement stable, ou bien de nombre de rotation irrationnel. Si $T^1 \times 0$ est un cercle invariant asymptotiquement stable pour \bar{G} , on a $s_0(\bar{F}) < 1$.

Démonstration. Si \bar{g} est structurellement stable, on écrit que $T^1 \times 0$ est asymptotiquement stable pour G^q , ce qui implique

$$\forall \theta \in \text{Per}(\bar{g}), \quad a_q(\theta) < 1,$$

et donc $s_0(\bar{F}) < 1$ par le lemme II-2.3 (il n'y a qu'un nombre fini de points périodiques).

Si \bar{g} a un nombre de rotation irrationnel, le raisonnement fait appel à des théorèmes beaucoup plus fins: de $\lim_{p \rightarrow +\infty} a_p(\theta) = 0$, on déduit que, pour tout $\theta \in T^1$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \text{Log } a_p(\theta) = -\infty, \quad \text{et donc} \quad \Lambda = \int_{T^1} (\text{Log } a) d\nu \leq 0.$$

Soit $\text{Log } \bar{G}: T^1 \times \mathbb{R} \rightarrow T^1 \times \mathbb{R}$ le difféomorphisme défini par

$$(\text{Log } \bar{G})(\theta, x) = (\bar{g}(\theta), x + \text{Log } a(\theta)).$$

Pour tout $(\theta, x) \in T^1 \times \mathbb{R}$, la projection sur \mathbb{R} de la semi-orbite positive de (θ, x) par les itérés de $\text{Log } \bar{G}$ est bornée supérieurement; en effet,

$$(\text{Log } \bar{G})^p(\theta, x) = (\bar{g}^p(\theta), x + \text{Log } a_p(\theta))$$

et on vient de rappeler que, pour tout $\theta \in T^1$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \text{Log } a_p(\theta) = -\infty$.

On déduit alors d'un joli théorème de GOTTSHALK et HEDLUND* ([7] 14–13) que Λ est strictement négatif et donc que $s_0(\bar{F}) < 1$. Ce théorème est applicable ici car le théorème de DENJOY ([8] chapitre VI) implique l'existence de $\bar{h} \in \text{Diff}_0^0(T^1)$ tel que $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_{\rho(\bar{g})} \circ \bar{h}$, ce qui équivaut à la minimalité de \bar{g} (i.e. à la densité dans T^1 de chaque orbite de \bar{g}).

On déduit alors du lemme II-1.5. le

II-2.13. Corollaire. *Sous les hypothèses du lemme précédent, la stabilité asymptotique de $T^1 \times 0$ pour \bar{G} implique la même propriété pour \bar{F} .*

II-2.14 Remarque. Si $\bar{g} \in \text{Diff}_0^2(T^1)$ a un nombre de rotation irrationnel, et si $T^1 \times 0$ est asymptotiquement stable pour \bar{G} , on a donc la situation suivante:

$$s_0(\bar{F}) < 1 \quad \text{et} \quad S_0(\tau(\bar{g})) = \text{cercle unité.}$$

On déduit de ([10] prop. 2.2.) que $\tau \bar{F}$ laisse invariant un sous-fibré de $\tau_{T^1 \times 0} T^1 \times \mathbb{R}$ supplémentaire de $\tau(T^1 \times 0)$ (le lecteur étudiera avec profit l'exemple simple $F(\theta, x) = (\theta + \omega_0 + x, ax)$, $a \neq 1$). En utilisant ([10] Théorème 4.1. (g)) on en déduit que \bar{F} est, au voisinage de $T^1 \times 0$, topologiquement conjugué à \bar{G} .

Une conclusion analogue dans le cas où \bar{g} est structurellement stable n'est valable (via [10] prop. 2.3.) que si $s_1(\bar{F}) < 1$ (qui n'est pas impliqué dans ce cas par $s_0(\bar{F}) < 1$).

II-2.15. Remarques. (i) Dans le cas où $\bar{g} \in \text{Diff}_0^2(T^1)$, le lemme II.2.12 devient évident lorsque $S_0(\bar{F})$ contient une valeur propre λ si le nombre de rotation de \bar{g} est irrationnel; cela signifie en effet qu'il existe $X \neq 0$, $X \in \mathcal{C}^0(T^1; \mathbb{C})$ tel que

$$\lambda X(g(\theta)) = a(\theta) X(\theta).$$

* Nous remercions M. HERMAN pour cette référence et pour bien d'autres.

En prenant les modules, on peut supposer que $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et que $X \in \mathcal{C}^0(T^1; \mathbb{R}_+)$. De plus, la continuité de X et la minimalité de \bar{g} impliquent que X ne peut s'annuler en un point sans être identiquement nul, donc $X \in \mathcal{C}^0(T^1;]0, +\infty[)$. En passant aux logarithmes et en intégrant pour la mesure ν on voit que $\lambda = \exp A$. Le changement de variables $\bar{K}: T^1 \times \mathbb{R} \rightarrow T^1 \times \mathbb{R}$ défini par $\bar{K}(\theta, x) = (\theta, X(\theta)^{-1} \cdot x)$ transforme alors \bar{G} en $\bar{K} \circ \bar{G} \circ \bar{K}^{-1}$ qui envoie (θ, x) sur $(\bar{g}(\theta), (\exp A) \cdot x)$; sur cette dernière forme l'assertion de II-2.12 est évidente.

(ii) Toujours dans les mêmes conditions, on déduit de GOTTSHALK et HEDLUND (voir [8] IV.4.1.) que $S_0(\bar{G})$ contient une valeur propre si et seulement si il existe $\theta_0 \in T^1$ tel que

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} |\text{Log } a_p(\theta_0) - pA| < +\infty.$$

II-3. Le cas où le spectrographe contient une valeur propre

Dans tout ce paragraphe nous supposerons que $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_\omega \circ \bar{h}$, $\bar{h} \in \text{Diff}_0^1(T^n)$ (éventuellement $\bar{h} \in \text{Diff}_0^l(T^n)$). \bar{R}_ω désigne la «rotation» de T^n quotient de la translation R_ω de \mathbb{R}^n de vecteur $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si $h \in D^0(T^n)$ est un relèvement à \mathbb{R}^n de \bar{h} , on peut supposer, quitte à modifier ω par addition d'un élément de \mathbb{Z}^n , que $g = h^{-1} \circ R_\omega \circ h$ (en fait on ne l'utilisera pas). Si $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ sont des éléments de \mathbb{R}^n , $a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ désigne leur produit scalaire euclidien. Enfin, on notera $e^{2i\pi a \cdot b}$ au lieu de $e^{2i\pi(a \cdot b)}$.

II-3.1. Lemme. *On suppose que $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_\omega \circ \bar{h}$, $\bar{h} \in \text{Diff}_0^l(T^n)$; soit $q \in \mathbb{Z}^n$: si $\lambda \in S_l(\bar{F})$, il en est de même de $\lambda e^{-2i\pi q \cdot \omega}$; si λ est une valeur propre, $\lambda e^{-2i\pi q \cdot \omega}$ est une valeur propre.*

II-3.2. Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses, si une des composantes de ω est irrationnelle, $S_l(\bar{F})$ est une réunion de cercles centrés à l'origine. Si un des cercles contient une valeur propre, les valeurs propres sont denses dans ce cercle.*

Démonstration. Évidente d'après l'équivalence (analogue à celle remarquée à la fin de II-2.9.) entre les équations

$$\lambda X(\theta) - A(g^{-1}(\theta)) X(g^{-1}(\theta)) = Y(\theta)$$

et

$$\begin{aligned} &\lambda e^{-2i\pi q \cdot \omega} X(\theta) e^{2i\pi q \cdot h(\theta)} - A(g^{-1}(\theta)) X(g^{-1}(\theta)) e^{2i\pi q \cdot h(g^{-1}(\theta))} \\ &= Y(\theta) e^{2i\pi q \cdot h(g^{-1}(\theta))}. \end{aligned}$$

II-3.3. Soit $\lambda = \rho e^{2i\pi\Omega} \neq 0$ une valeur propre de

$$\mathcal{A}: \mathcal{C}^l(T^n; E_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{C}^l(T^n; E_{\mathbb{C}})$$

et $X \in \mathcal{C}^l(T^n; E_{\mathbb{C}})$ un vecteur propre correspondant:

$$A(g^{-1}(\theta)) X(g^{-1}(\theta)) = \lambda X(\theta).$$

Remarquons que si \bar{R}_ω est une rotation ergodique, c'est-à-dire si les composantes de ω sont rationnellement indépendantes, X ne s'annule en aucun point de T^n .

En effet, si $X(\theta_0)=0$, on déduit de l'identité

$$X(g(\theta)) = \lambda^{-1} A(\theta) X(\theta)$$

que X s'annule sur la semi-orbite positive de θ_0 sous l'action de \bar{g} ; d'après l'hypothèse celle-ci est dense dans T^n et X , étant continu, devrait être identiquement nul ce qui est exclu. En particulier, si $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut choisir X réel, c'est-à-dire $X \in \mathcal{C}^1(T^n; E)$; l'application

$$\Sigma: T^n \times \mathbb{R} \rightarrow T^n \times E$$

définie par

$$\Sigma(\theta, x) = (\theta, x X(\theta))$$

est alors injective et son image est un sous-fibré de rang 1 de classe C^1 de $T^n \times E$ invariant par \bar{G} .

La restriction de \bar{G} à ce sous-fibré est conjuguée par Σ au difféomorphisme

$$(\theta, x) \mapsto (\bar{g}(\theta), \lambda x)$$

de $T^n \times \mathbb{R}$.

II-3.4. Nous considérons maintenant le cas où λ n'est pas réelle; si \bar{h} est de classe C^1 et si $\lambda = \rho e^{2i\pi\Omega}$ on déduit de II-3.1. que $S_1(\bar{F})$ contient une valeur propre réelle dès que

$$\Omega \in \omega \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Lorsque ceci n'est pas vérifié, on est amené à chercher un sous-fibré invariant de rang deux; il nous faut donc un critère d'«indépendance» de vecteurs propres, qui nous est fourni par le lemme suivant.

II-3.5. Lemme. *On suppose que $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_\omega \circ \bar{h}$, $\bar{h} \in \text{Diff}_0^1(T^n)$, \bar{R}_ω ergodique. Soient λ_1, λ_2 deux valeurs propres (non nulles) dans $S_1(\bar{F})$, et soient $X_1, X_2 \in \mathcal{C}^1(T^n; E_{\mathbb{C}})$ deux vecteurs propres leur correspondant.*

Si, pour tout $q \in \mathbb{Z}^n$, on a

$$\lambda_2 \neq \lambda_1 e^{2i\pi q \cdot \omega}$$

les vecteurs $X_1(\theta)$ et $X_2(\theta)$ de $E_{\mathbb{C}}$ sont indépendants pour tout $\theta \in T^n$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $\theta_0 \in T^n$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, tels que

$$\alpha_1 X_1(\theta_0) + \alpha_2 X_2(\theta_0) = 0.$$

On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\lambda_1^p \alpha_1 X_1(g^p(\theta_0)) + \lambda_2^p \alpha_2 X_2(g^p(\theta_0)) = 0.$$

Si $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$ il est clair que cela entraîne $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ puisque X_1 et X_2 sont bornés sur T^n et ne s'annulent pas (d'après II-3.3.). On a donc $\lambda_2 = \lambda_1 e^{2i\pi\beta}$, et

$$\alpha_1 X_1(g^p(\theta_0)) + e^{2i\pi p\beta} \alpha_2 X_2(g^p(\theta_0)) = 0.$$

Pour toute suite $p_i \rightarrow +\infty$ telle que $p_i \omega \rightarrow 0$ dans \mathbb{R}^n modulo \mathbb{Z}^n (donc $\bar{g}^{p_i} \rightarrow \text{id}$), la suite $p_i \beta$ tend donc vers 0 modulo \mathbb{Z} .

Considérons la rotation $\bar{R}_{\omega, \beta}$ de $T^n \times T^1 = T^{n+1}$: l'orbite d'un point (θ_0, η) a une

adhérence dont la projection sur le facteur T^n est égale à T^n (ergodicité de \bar{R}_ω); d'autre part, l'intersection de cette adhérence avec le cercle $\{\theta_0\} \times T^1$ est réduite à (θ_0, η) ; en effet si elle contenait un autre point (θ_0, η') il existerait une suite $p_i \rightarrow +\infty$ telle que $p_i \beta \rightarrow \eta' - \eta$ modulo \mathbb{Z} et $p_i \omega \rightarrow 0$ modulo \mathbb{Z}^n , ce qui est une contradiction. On en déduit que l'adhérence de l'orbite de (θ_0, η) sous l'action de $\bar{R}_{\omega, \beta}$ est un tore T^n qui se projette biunivoquement sur le facteur T^n de $T^n \times T^1$, et donc qu'il existe $q \in \mathbb{Z}^n$ tel que $e^{2i\pi\beta} = e^{2i\pi q \cdot \omega}$.

Appliquons le lemme au cas où $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \rho e^{-2i\pi\Omega}$: la condition devient

$$\Omega \notin \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

et garantit l'indépendance pour tout $\theta \in T^n$ des vecteurs $X(\theta)$ et $\bar{X}(\theta)$, $X \in \mathcal{C}^l(T^n; E_{\mathbb{C}})$ étant un vecteur propre de \mathcal{A} relatif à la valeur propre λ ; l'application

$$\Sigma: T^n \times \mathbb{C} \rightarrow T^n \times E$$

définie par

$$\Sigma(\theta, z) = (\theta, R e(z X(\theta)))$$

est donc injective et son image est un sous-fibré de rang deux de classe C^l de $T^n \times E$ invariant par \bar{G} .

La restriction de \bar{G} à ce sous-fibré est conjuguée par Σ au difféomorphisme

$$(\theta, z) \mapsto (\bar{g}(\theta), \lambda \cdot z)$$

de $T^n \times \mathbb{C} \cong T^n \times \mathbb{R}^2$.

II-3.6. Traitons enfin en toute généralité le cas où $\Omega \in \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Nous noterons

$$2\Omega = q \cdot \omega + k, \quad q \in \mathbb{Z}^n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rappelons que si $q \in 2\mathbb{Z}^n$, on se ramène à l'étude de II-3.3. et remarquons que, si \bar{h} est de classe C^l , on peut par II-3.1. se ramener au cas où toutes les composantes de q sont des 0 ou des 1.

Considérons l'application $\tilde{X} \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^n; E_{\mathbb{C}})$ définie par

$$\tilde{X}(\theta) = X(\theta) e^{i\pi q \cdot h(\theta)}$$

(on a supposé ici que \bar{h} est de classe C^l). Remarquons que, si $\xi \in \mathbb{Z}^n$,

$$\tilde{X}(\theta + \xi) = \tilde{X}(\theta) \cdot e^{i\pi q \cdot \xi} = \pm \tilde{X}(\theta).$$

En particulier, \tilde{X} est $2\mathbb{Z}^n$ -périodique. D'autre part,

$$\begin{aligned} A(\theta) \tilde{X}(\theta) &= \lambda e^{i\pi q \cdot h(\theta)} X(g(\theta)) \\ &= \rho e^{i\pi[q \cdot R_\omega(h(\theta)) + k]} X(g(\theta)) \\ &= \rho e^{i\pi[q \cdot h(g(\theta)) + k]} X(g(\theta)) \\ &= \rho e^{i\pi k} \tilde{X}(g(\theta)) \\ &= \pm \rho \tilde{X}(g(\theta)) \end{aligned}$$

quitte à modifier $X(\theta)$, on peut supposer \tilde{X} réel; l'application

$$\tilde{\Sigma}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times E$$

définie par

$$\tilde{\Sigma}(\theta, x) = (\theta, x \tilde{X}(\theta))$$

est injective et son image est un sous-fibré de rang un de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \times E$ invariant par G .

La restriction de G à ce sous-fibré est conjuguée par Σ au difféomorphisme

$$(\theta, x) \mapsto (g(\theta), \rho e^{i\pi k} x)$$

de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Enfin, de la relation

$$\tilde{X}(\theta + \xi) = \pm \tilde{X}(\theta),$$

on déduit que l'image de ce sous-fibré par la projection naturelle de $\mathbb{R}^n \times E$ sur $T^n \times E$ est un sous-fibré de rang un de classe C^1 de $T^n \times E$ invariant par \bar{G} ; ce sous-fibré est trivial si et seulement si $q \in 2\mathbb{Z}^n$. Par exemple, si $n=1$ et si $q=1$, ce sous-fibré est une bande de Moebius.

Résumons ce qui précède sous forme d'une proposition:

II-3.7. Proposition. *On suppose que $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_\omega \circ \bar{h}$, $\bar{h} \in \text{Diff}_0^1(T^n)$, \bar{R}_ω ergodique, et que $S_1(\bar{F})$ contient la valeur propre $\lambda = \rho e^{2i\pi\Omega}$.*

(1) *Si $\Omega \notin \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, il existe un sous-fibré C^1 de $T^n \times E$ isomorphe à $T^n \times \mathbb{R}^2$ invariant par \bar{G} sur lequel \bar{G} induit un difféomorphisme conjugué à*

$$(\theta, z) \rightarrow (\bar{g}(\theta), \lambda z) \quad (\text{on a identifié } \mathbb{R}^2 \text{ à } \mathbb{C}).$$

(2) *Si $\Omega = \frac{1}{2}q \cdot \omega + \frac{1}{2}k$, $q \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$, et si \bar{h} est de classe C^1 , il existe un sous-fibré C^1 de rang un de $T^n \times E$ invariant par \bar{G} , trivial si et seulement si $q \in 2\mathbb{Z}^n$ (auquel cas \mathcal{A} possède une valeur propre réelle). Lorsqu'on relève ce sous-fibré en un sous-fibré de $\mathbb{R}^n \times E$ isomorphe à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, la restriction de G à ce dernier est conjuguée à*

$$(\theta, x) \mapsto (\bar{g}(\theta), \rho e^{i\pi k} x).$$

Chapitre III. Bifurcation d'un tore invariant T^n en un tore invariant T^{n+1} en présence d'une valeur propre

Dans ce chapitre, on considère une famille à un paramètre d'applications de classe C^k

$$\bar{F}_\mu: T^n \times \mathcal{V}, T^n \times 0 \rightarrow T^n \times E, \quad T^n \times 0$$

où \mathcal{V} est un voisinage de 0 dans E . Une telle famille se relève en une application de classe C^k

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathcal{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times E \times \mathbb{R}$$

de la forme

$$F(\theta, x, \mu) = (f(\theta, x, \mu), \Phi(\theta, x, \mu), \mu).$$

On note

$$f(\theta, 0, \mu) = f_\mu(\theta), \quad f_0(\theta) = g(\theta) \in D^k(T^n),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\theta, 0, \mu) = A_\mu(\theta) \in \mathcal{L}(E), \quad F(\theta, x, \mu) = (F_\mu(\theta, x), \mu).$$

On définit comme au chapitre II \bar{G}_μ et G_μ par

$$G_\mu: \mathbb{R}^n \times E \rightarrow \mathbb{R}^n \times E$$

$$G_\mu(\theta, x) = (f_\mu(\theta), A_\mu(\theta)x).$$

On note $\mathcal{A}_\mu: \mathcal{C}^l(T^n; E) \rightarrow \mathcal{C}^l(T^n; E)$ l'opérateur défini, pour μ proche de 0 (si $k \geq 1$), par

$$(\mathcal{A}_\mu X)(\theta) = A_\mu(f_\mu^{-1}(\theta)) X(f_\mu^{-1}(\theta)).$$

III-1. Réduction à la dimension deux

On fait les hypothèses suivantes:

(H₁) $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_{\omega_0} \circ \bar{h}$, $\bar{h} \in \text{Diff}_0^1(T^n)$, \bar{R}_{ω_0} ergodique.

(H₂) $S_l(\bar{F}_0)$ contient une valeur propre de module 1, $\lambda_0 = e^{2i\pi\Omega_0}$ telle que

1) $\Omega_0 \notin \frac{1}{2}\omega_0 \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$,

2) λ_0 est «simple» dans le sens suivant (voir aussi III.1.1.): $T^n \times E = \xi_1 \oplus \xi_2$ est somme directe de deux sous-fibrés de classe C^l invariants par \bar{G}_0 , ξ_2 isomorphe à $T^n \times \mathbb{R}^2$ étant le fibré donné par la Proposition II-3.7.(1), et le spectre de la restriction de \mathcal{A}_0 au sous-espace $\Gamma^l(\xi_1)$ de $\mathcal{C}^l(T^n; E)$ formé des sections de classe \mathcal{C}^l de ξ_1 est contenu dans l'intérieur du disque unité. (Il découle facilement de II-3.1. et II-3.7.(1) que le spectre de la restriction de \mathcal{A}_0 à $\Gamma^l(\xi_2)$ coïncide avec le cercle unité.)

Ces hypothèses vont nous permettre d'appliquer le théorème de la variété centrale II-1.7. à l'application \bar{F} qui laisse invariant le tore $T^n \times 0 \times 0$ de $T^n \times E \times \mathbb{R}$.

Tout d'abord, quitte à remplacer E par $E \times \mathbb{R}^2$ et \bar{F} par l'application (non inversible)

$$T^n \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow (T^n \times E) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},$$

$$(\theta, x, y, \mu) \rightarrow (\bar{F}_\mu(\theta, x), 0, \mu)$$

on peut rendre trivial le fibré stablement trivial ξ_1 . A un changement C^l de coordonnées près, on peut alors supposer que $E = E_1 \oplus E_2$, $E_2 \cong \mathbb{R}^2$, $\xi_i = T^n \times E_i$, $i = 1, 2$.

L'application $G: \mathbb{R}^n \times E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times E \times \mathbb{R}$ déduite de F comme en II-0 s'écrit

$$G(\theta, x, \mu) = (g(\theta), A(\theta)x, \mu)$$

(ne pas oublier que $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(\theta, 0, 0) \equiv 0$ puisque $\Phi(\theta, 0, \mu) \equiv 0$).

D'après II-3.7.(1) la restriction de $A(\theta)$ à $E_2 \cong \mathbb{R}^2$ est indépendante de θ (rotation d'angle Ω_0). Il est alors facile de voir que les hypothèses de II-1.7. sont satisfaites (c'est pour que $S_0(\tau(\bar{g}))$ soit contenu dans le cercle unité qu'on a supposé la conjugaison \bar{h} de \bar{g} à \bar{R}_{ω_0} de classe C^1 ; si $n = 1$, on déduit du §II-2 que la conjugaison C^0 suffit).

Il existe donc une sous-variété V de dimension $n+3$ de $T^n \times E \times \mathbb{R}$ de classe $C^{l-3,1}$, contenant $T^n \times 0 \times 0$, et tangente le long de $T^n \times 0 \times 0$ à $T^n \times E_2 \times \mathbb{R}$, qui est localement invariante par \bar{F} et localement attractante; de cette dernière propriété, on déduit que V contient un voisinage de $T^n \times 0 \times 0$ dans $T^n \times 0 \times \mathbb{R}$.

Par transversalité, les intersections de V avec les sous-variétés $T^n \times E \times \{\mu\}$ de $T^n \times E \times \mathbb{R}$ sont des sous-variétés de classe $C^{l-3,1}$ de dimension $n+2$ de $T^n \times E$ contenant $T^n \times 0$ et localement difféomorphes à $T^n \times \mathbb{R}^2$.

Comme dans la situation classique de bifurcation de Hopf pour les difféomorphismes on se ramène donc à l'étude de la bifurcation en dimension deux, c'est-à-dire dans le cas où $E \cong \mathbb{R}^2$ (et où en plus $A_0(\theta)$ est indépendant de θ).

III-1.1. Remarque. Il est plus naturel de remplacer le 2) de (H_2) par l'hypothèse 2') suivante, purement spectrale:

2') Soit ξ_2 le sous-fibré de classe C^l de $T^n \times E$ donné par la proposition II-3.7.(1).

On suppose que $S_1(\bar{F}_0) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ où σ_1 est contenu dans un disque de rayon inférieur à 1 alors que σ_2 est contenu dans le cercle unité (en fait égal); on suppose de plus que la décomposition correspondante

$$C^l(T^n; E) \cong \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$$

vérifie

$$\mathcal{E}_2 = \Gamma^l(\xi_2) \subset C^l(T^n; E).$$

Pour montrer l'équivalence des deux hypothèses considérons, pour $\theta \in T^n$, $i=1, 2$,

$$E_i(\theta) = \{x \in E; \exists \varphi_i \in \mathcal{E}_i, x = \varphi_i(\theta)\}.$$

On vérifie immédiatement que, pour tout θ , $E_i(\theta)$ est un sous-espace vectoriel de E , que $E_2(\theta) \cong \mathbb{R}^2$, et que $E_1(\theta) + E_2(\theta) = E$.

De plus, $E_1(\theta) \cap E_2(\theta) = \{0\}$ car, si $x \in E_1(\theta)$, $\bar{G}_0^p(\theta, x)$ tend vers $T^n \times 0$ lorsque p tend vers $+\infty$, alors que si $x \in E_2(\theta)$, $\bar{G}_0^p(\theta, x)$ reste pour tout p contenu dans un tore T^{n+1} ne rencontrant pas $T^n \times 0$.

Notons $p_1(\theta): E \rightarrow E$ le projecteur (*a priori* discontinu) sur $E_1(\theta)$ parallèlement à $E_2(\theta)$.

Notons $P_1: C^l(T^n; E) \rightarrow C^l(T^n; E)$ le projecteur continu sur \mathcal{E}_1 parallèlement à \mathcal{E}_2 .

On définit de même $p_2(\theta)$ et P_2 en intervertissant les indices 1 et 2.

Enfin, si $x \in E$, notons $C_x \in C^l(T^n; E)$ l'application constante de valeur x . L'application $x \mapsto C_x$ est une isométrie linéaire de E dans $C^l(T^n; E)$. On déduit de ce qui précède que

$$\forall \theta \in T^n, \quad \forall i=1, 2, \quad \forall X \in C^l(T^n; E), \quad (P_i X)(\theta) = p_i(\theta) X(\theta);$$

si $K_i = \|P_i\|_{C^l(T^n; E)}$, on a

$$\|P_i C_x\|_{C^l(T^n; E)} \leq K_i \|C_x\|_{C^l(T^n; E)} = K_i \|x\|_E.$$

En particulier,

$$\|p_i(\theta)x\|_E \leq \|P_i C_x\|_{C^0(T^n; E)} \leq \|P_i C_x\|_{C^l(T^n; E)} \leq K_i \|x\|_E$$

ce qui montre la continuité des projecteurs $p_i(\theta)$ pour tout $\theta \in T^n$; en particulier $E_1(\theta)$ est fermé, et la somme directe $E = E_1(\theta) \oplus E_2(\theta)$ est topologique. Si $l \geq 1$, l'application de T^n dans $\mathcal{L}(E)$ qui à θ associe $p_i(\theta)$, $i = 1, 2$, est continue; en effet

$$\begin{aligned} \|p_i(\theta) - p_i(\theta')\|_{\mathcal{L}(E)} &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|p_i(\theta)x - p_i(\theta')x\|_E \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(P_i C_x)(\theta) - (P_i C_x)(\theta')\|_E \leq K_i \|\theta - \theta'\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

(on identifie applications de T^n dans E et applications \mathbb{Z}^n -périodiques de \mathbb{R}^n dans E). En fait cette continuité est vraie même si $l = 0$ comme le montre une démonstration analogue à celle de ([10] Théorème 2.5).

Soit $\theta_0 \in T^n$; si \mathcal{V} est un voisinage assez petit de θ_0 dans T^n , l'application

$$T: \mathcal{V} \times E \rightarrow \mathcal{V} \times E$$

définie par $T(\theta, x) = (\theta, [p_1(\theta) \cdot p_1(\theta_0) + p_2(\theta) \cdot p_2(\theta_0)]x)$ est un difféomorphisme de classe C^l qui trivialise simultanément les deux fibrés ξ_1 et ξ_2 définis par les $E_1(\theta)$ et les $E_2(\theta)$ respectivement.

En effet, l'application $(\theta, x) \mapsto p_i(\theta)x$ est de classe C^l comme composée de $(\theta, x) \mapsto (\theta, P_i C_x)$ qui est de classe C^∞ de $T^n \times E$ dans $T^n \times C^l(T^n; E)$ et de l'évaluation $(\theta, P_i C_x) \mapsto (P_i C_x)(\theta)$ qui est de classe C^l de $T^n \times C^l(T^n; E)$ dans E .

Pour voir que T est un difféomorphisme il suffit, grâce au théorème des fonctions implicites, de montrer que pour θ fixé dans \mathcal{V} , l'application linéaire $p_1(\theta) \cdot p_1(\theta_0) + p_2(\theta) \cdot p_2(\theta_0)$ est un isomorphisme. Mais, si \mathcal{V} est assez petit, cette application linéaire est proche de $p_1^2(\theta_0) + p_2^2(\theta_0) = \text{identité}$, et les isomorphismes linéaires forment un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Terminons en remarquant que si A est l'application de $T^n \times E \times \mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

$$A(\theta, x, u) = (\theta, p_1(\theta)x + \Sigma(\theta)u, \Sigma(\theta)^{-1} \circ p_2(\theta)x)$$

où on a noté $\Sigma(\theta, u) = (\theta, \Sigma(\theta)u)$, Σ étant défini à la fin de II-3.5., A est un difféomorphisme de classe C^l , et rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\theta, x, u) & \xrightarrow{\quad} & (\bar{G}_0(\theta, x), 0) \\ T^n \times E \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad} & T^n \times E \times \mathbb{R}^2 \\ \downarrow A & & \downarrow A \\ T^n \times E \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad} & T^n \times E \times \mathbb{R}^2 \\ (\theta, x_1, x_2) & \xrightarrow{\quad} & (\bar{g}(\theta), A_0(\theta)p_1(\theta)x_1, A_2x_2) \end{array}$$

où A_2 est la rotation d'angle Ω_0 . (Remarquer que, de $\mathcal{A}_0 P_i = P_i \mathcal{A}_0$, on déduit $A_0(\theta)p_i(\theta) = p_i(\bar{g}(\theta))A_0(\theta)$, et que par définition de Σ , $A_0(\theta)\Sigma(\theta) = \Sigma(\bar{g}(\theta))A_2$).

Nota. Quand nous parlons de sous-fibrés C^l c'est au sens ci-dessus; si la dimension de E est infinie, cela n'implique pas que les applications $\theta \mapsto p_i(\theta)$ de T^n dans $\mathcal{L}(E)$ soient de classe C^l ; elles sont seulement de classe $C^{l-1,1}$ en général.

III-2. Bifurcation en dimension deux lorsque $A_0(\theta)$ est constant

Dans ce paragraphe, on reprend les notations du début de III-1. avec $E = \mathbb{R}^2$, $k-3$ remplacé par k , et

$$A_0(\theta) = A_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\Omega_0 & -\sin 2\pi\Omega_0 \\ \sin 2\pi\Omega_0 & \cos 2\pi\Omega_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Il sera commode pour les calculs d'identifier \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} ; A_0 s'identifie alors à la multiplication par $\lambda_0 = e^{2i\pi\Omega_0}$.

Enfin, on remplace (H_1) par l'hypothèse analogue (H'_1) où \bar{h} est de classe C^l .

Par un changement de coordonnées de classe C^l , on peut donc supposer que $g(\theta) = \theta + \omega_0$, ce qui permet d'écrire les applications de classe C^l f et Φ sous la forme

$$f(\theta, z, \mu) = \theta + \omega_0 + O(|\mu| + |z|),$$

$$\Phi(\theta, z, \mu) = \lambda_0 z + O(|\mu||z| + |z|^2).$$

III-2.1. Traduction du changement de stabilité. Pour contrôler la perte de différentiabilité dans la résolution des équations aux différences on est amené à faire l'hypothèse

$(H'_2) \quad \exists \varepsilon \in]0, 1[, \quad C > 0 \quad \text{tels que}$
 $\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n - 0, \quad \forall r = 0, 1, 2,$
 $|r\Omega_0 + q \cdot \omega_0 - p| > \frac{C}{|q|^{n+\varepsilon}}, \quad \text{où } |q| \text{ désigne } \sup_{i=1, \dots, n} |q_i|,$
 et $\Omega_0 \neq 0, \frac{1}{2} \text{ modulo } \mathbb{Z}.$

On verra au chapitre V que les couples (ω_0, Ω_0) ne vérifiant pas une telle condition forment un sous-ensemble de \mathbb{R}^{n+1} de mesure nulle. Remarquons que cette hypothèse englobe l'hypothèse (H_2) qui dans le cas $E = \mathbb{R}^2$ se réduit à son 1).

III-2.2. Lemme. *On fait les hypothèses H'_1, H'_2 ; on suppose de plus que $l \geq n + 3$ et que*

$$\frac{d}{d\mu} \left[\int_0^1 \text{Log} |\det A_\mu(\theta)| d\theta \right]_{\mu=0} \neq 0.$$

Alors la stabilité du tore invariant $T^n \times 0$ de \bar{F}_μ ne dépend que du signe de cette quantité.

$$\text{Si } \frac{d}{d\mu} \left[\int_0^1 \text{Log} |\det A_\mu(\theta)| d\theta \right]_{\mu=0} > 0,$$

$T^n \times 0$ est stable pour $\mu < 0$, instable pour $\mu > 0$.

III-2.3. Remarque. Nous donnerons au chapitre V des conditions beaucoup plus larges impliquant le changement de stabilité. Il en résulte en particulier qu'on peut se passer des conditions diophantiennes. (Voir V-2.1. et V-2.5.)

La démonstration de III-2.2. est basée sur le

III-2.4. Lemme. *Sous les mêmes hypothèses que III-2.2. on peut, après un changement de variables de classe C^{l-n-3} , supposer que F_μ s'écrit*

$$f(\theta, z, \mu) = \theta + \omega_0 + \mu \omega_1 + O(|\mu|^2 + |\mu| |z| + |z|^2),$$

$$\Phi(\theta, z, \mu) = \lambda_0(1 + \mu \lambda_1)z + O(|\mu|^2 |z| + |z|^2).$$

Démonstration du lemme III-2.4. On part de

$$(1) \quad \begin{aligned} f(\theta, z, \mu) &= \theta + \omega_0 + \mu f_1(\theta) + z f_2(\theta) + \bar{z} \bar{f}_2(\theta) + O(|\mu|^2 + |\mu| |z| + |z|^2), \\ \Phi(\theta, z, \mu) &= \lambda_0 [z + \mu(\lambda_1(\theta)z + \lambda_2(\theta)\bar{z})] + O(|\mu|^2 |z| + |z|^2) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f_1 &\in \mathcal{C}^{l-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) && \mathbb{Z}^n\text{-périodique,} \\ f_2 &\in \mathcal{C}^{l-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n) && \mathbb{Z}^n\text{-périodique,} \\ \lambda_1, \lambda_2 &\in \mathcal{C}^{l-2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) && \mathbb{Z}^n\text{-périodique.} \end{aligned}$$

On cherche un changement de coordonnées de la forme

$$H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n \times 0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n \times 0 \times \mathbb{R}$$

avec

$$H(\theta, z, \mu) = (\theta', z', \mu)$$

(2)

$$\theta' = \theta + \delta(\theta, z, \mu),$$

$$z' = z + \gamma(\theta, z, \mu),$$

où

$$\delta(\theta, z, \mu) = \mu \beta_1(\theta) + z \beta_2(\theta) + \bar{z} \bar{\beta}_2(\theta),$$

$$\gamma(\theta, z, \mu) = \mu(\alpha_1(\theta)z + \alpha_2(\theta)\bar{z}),$$

$$F' = H \circ F \circ H^{-1}$$

s'écrit alors

$$F'(\theta', z', \mu) = (f'(\theta', z', \mu), \Phi'(\theta', z', \mu), \mu)$$

où f' et Φ' sont de la forme (1) avec $f_1, f_2, \lambda_1, \lambda_2$ remplacés respectivement par

$$(3) \quad \begin{aligned} f'_1(\theta') &= f_1(\theta') - \beta_1(\theta') + \beta_1(\theta' + \omega_0), \\ f'_2(\theta') &= f_2(\theta') - \beta_2(\theta') + \lambda_0 \beta_2(\theta' + \omega_0), \\ \lambda'_1(\theta') &= \lambda_1(\theta') - \alpha_1(\theta') + \alpha_1(\theta' + \omega_0), \\ \lambda'_2(\theta') &= \lambda_2(\theta') - \alpha_2(\theta') + \bar{\lambda}_0^2 \alpha_2(\theta' + \omega_0). \end{aligned}$$

Les autres termes affectés par le changement de coordonnées sont les termes en $O(|\mu| |z|^2 + |\mu|^2 |z|)$ dans Φ et les termes en $O(|\mu| |z| + |\mu|^2)$ dans f .

Le lemme résulte alors de la possibilité de résoudre les équations aux différences (3) avec

$$(3') \quad \begin{aligned} f'_1(\theta') &\equiv \int_0^1 f_1(\theta) d\theta = \omega_1, \\ f'_2(\theta') &\equiv 0, \\ \lambda'_1(\theta') &\equiv \int_0^1 \lambda_1(\theta) d\theta = \lambda_1, \\ \lambda'_2(\theta') &\equiv 0 \end{aligned}$$

en ne perdant que $n + \varepsilon'$ pour tout $\varepsilon' > \varepsilon$ en dérivabilité, ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2 & \text{ de classe } C^{l-n-2-\varepsilon'}, \\ \beta_1, \beta_2 & \text{ de classe } C^{l-n-1-\varepsilon'} \end{aligned}$$

(le raisonnement est analogue à celui de [8] chapitre VII; voir aussi le paragraphe V.1. du présent article).

Fin de la démonstration du lemme III-2.2. On commence par remarquer que

$$A_0^{-1} A_\mu(\theta) = \text{Id} + \mu B(\theta) + O(|\mu|^2),$$

avec

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} \text{Re}(\lambda_1(\theta) + \lambda_2(\theta)) & -\text{Im}(\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)) \\ \text{Im}(\lambda_1(\theta) + \lambda_2(\theta)) & \text{Re}(\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)) \end{pmatrix},$$

d'où on déduit que

$$\frac{d}{d\mu} \left[\int_0^1 \text{Log} |\det A_\mu(\theta)| d\theta \right]_{\mu=0} = \int_0^1 \text{trace } B(\theta) d\theta = 2 \text{Re } \lambda_1.$$

L'hypothèse de III-2.2. s'écrit donc $\text{Re } \lambda_1 \neq 0$. D'autre part, sous la forme du Lemme III-2.4., $A_\mu(\theta)$ s'écrit

$$A_\mu(\theta)(z) = \lambda_0(1 + \mu \lambda_1)z + O(|\mu|^2).$$

L'application linéaire

$$\mathcal{U}_\mu: \mathcal{C}^0(T^n; \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^0(T^n; \mathbf{C})$$

définie pour $|\mu|$ assez petit par

$$(\mathcal{U}_\mu X)(\theta) = \lambda_0(1 + \mu \lambda_1) X(f_\mu^{-1}(\theta))$$

vérifie

$$\|\mathcal{U}_\mu X\|_0 = (1 + \mu \text{Re } \lambda_1 + O(|\mu|^2)) \|X\|_0.$$

L'application linéaire

$$\mathcal{A}_\mu: \mathcal{C}^0(T^n; \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^0(T^n; \mathbf{C})$$

qui est obtenue en perturbant \mathcal{U}_μ par un opérateur dont la norme est de l'ordre de $|\mu|^2$ vérifie donc

$$(1 + \mu \text{Re } \lambda_1 - O(|\mu|^2)) \|X\|_0 \leq \|\mathcal{A}_\mu X\|_0 \leq (1 + \mu \text{Re } \lambda_1 + O(|\mu|^2)) \|X\|_0.$$

En appliquant la formule donnant le rayon spectral à \mathcal{A}_μ et à \mathcal{A}_μ^{-1} on en déduit que le spectre de \mathcal{A}_μ (c'est-à-dire $S_0(\bar{F}_\mu)$) est contenu dans une couronne d'épaisseur de l'ordre de $|\mu|^2$ centrée sur le cercle de centre 0 et de rayon $(1 + \mu \text{Re } \lambda_1)$. Puisque $\text{Re } \lambda_1 \neq 0$ cette couronne ne rencontre pas le cercle unité dès que $|\mu|$ est assez petit.

Remarquons que le changement de variables est continu en θ et linéaire en z, \bar{z} ; le 0-spectrographe de \bar{F}_μ avant et après le changement de variables est donc le même; on applique alors II-1.5. au \bar{F}_μ original qui est de classe C^2 , ou à \bar{F}_μ^{-1}

ce qui démontre III-2.2. On peut remarquer qu'on n'a pas utilisé le changement de variables sur la composante $f(\theta, z, \mu)$ ce qui permet de supprimer dans III-2.2. le cas $r=1$ de (H'_2) .

III-2.5. Forme normale approchée. Nous effectuons maintenant une suite de changements de coordonnées (avec perte de différentiabilité) dans l'esprit de ceux qui permettent d'arriver à la forme normale d'un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 pour l'étude de la bifurcation de HOPF (voir [16] et [18]).

Les équations aux différences rencontrées nous amènent à faire en plus des hypothèses (H'_1) , (H'_2) l'hypothèse (H''_2) qui contient (H'_2) (on affaiblira cette hypothèse en V-3).

$$(H''_2) \quad \exists \varepsilon \in]0, \frac{1}{3}[, \quad C > 0$$

tels que

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n - 0, \quad \forall r = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$|r\Omega_0 + q \cdot \omega_0 - p| > \frac{C}{|q|^{n+\varepsilon}}$$

et $\Omega_0 \neq 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ modulo \mathbb{Z} . Si $\Omega_0 \notin \frac{1}{5}\omega_0 \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{5}\mathbb{Z}$, on suppose l'inégalité ci-dessus vérifiée pour $r=5$.

On verra au chapitre V que, comme pour (H'_2) , les couples (ω_0, Ω_0) ne vérifiant pas une telle condition forment un sous-ensemble de mesure nulle dans \mathbb{R}^{n+1} .

III-2.6. Proposition (forme normale approchée). *Sous les hypothèses (H'_1) , (H'_2) , et si $l \geq 3n+3$, il existe un changement de coordonnées de classe C^{l-3n-3} qui ramène F_μ à la forme*

$$f(\theta, z, \mu) = \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + |z|^2 \omega_2 + O(|\mu|^2 + |\mu||z|^2 + |z|^4)$$

$$\Phi(\theta, z, \mu) = \lambda_0 [(1 + \mu\lambda_1)z + \alpha z|z|^2 + \beta e^{2in\alpha \cdot \theta} \bar{z}^4] + O(|\mu|^2|z| + |\mu||z|^3 + |z|^5)$$

avec β éventuellement non nul dans le seul cas où $5\Omega_0 = q \cdot \omega_0 + k$ ($q \in \mathbb{Z}^n$, celui de la formule ci-dessus, $k \in \mathbb{Z}$).

Démonstration. On part de F_μ de la forme donnée en III-2.4.

$$f(\theta, z, \mu) = \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + \mu(zf_{110}(\theta) + \bar{z}f_{101}(\theta))$$

$$+ \sum_{\substack{2 \leq r+s \leq 3 \\ r, s \geq 0}} z^r \bar{z}^s f_{0rs}(\theta) + O(|\mu|^2 + |\mu||z|^2 + |z|^4),$$

$$(4) \quad \Phi(\theta, z, \mu) = \lambda_0(1 + \mu\lambda_1)z + \mu \left(\sum_{\substack{r+s=2 \\ r, s \geq 0}} \xi_{1rs}(\theta) z^r \bar{z}^s \right)$$

$$+ \sum_{\substack{2 \leq r+s \leq 4 \\ r, s \geq 0}} \xi_{0rs}(\theta) z^r \bar{z}^s + O(|\mu|^2|z| + |\mu||z|^3 + |z|^5).$$

Le changement de variables III-2.4. n'ayant pas affecté les termes indépendants de μ , on a

$$f_{0rs} = \bar{f}_{0rs} \in \mathcal{C}^{l-(r+s)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n) \quad \mathbb{Z}^n\text{-périodique,}$$

$$\xi_{0rs} \in \mathcal{C}^{l-(r+s)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \quad \mathbb{Z}^n\text{-périodique.}$$

On vérifie d'autre part que, puisque $l-n-2-\varepsilon' < l-3$,

$$f_{110} = \bar{f}_{101} \in \mathcal{C}^{l-n-2-\varepsilon'}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n) \quad \mathbb{Z}^n\text{-périodique}$$

si

$$r+s=2, \quad \xi_{1rs} \in \mathcal{C}^{l-n-2-\varepsilon'}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \quad \mathbb{Z}^n\text{-périodique.}$$

Comme dans [16] il est plus agréable de procéder par une suite de changements de variables élémentaires analogues à celui de III-2.4 (mêmes notations).

Deuxième changement de variables:

$$(5) \quad \begin{aligned} \theta' &= \theta + \sum_{\substack{r+s=2 \\ r,s \geq 0}} z^r \bar{z}^s \delta_{0rs}(\theta), & \delta_{0rs} &= \bar{\delta}_{0sr}, \\ z' &= z + \sum_{\substack{r+s=2 \\ r,s \geq 0}} \gamma_{0rs}(\theta) z^r \bar{z}^s; \end{aligned}$$

F_μ est transformé en $F'_\mu(\theta', z') = (f'(\theta', z', \mu), \Phi'(\theta', z', \mu))$, où F' et Φ' sont de la forme (4) avec les nouveaux coefficients suivants ($r+s=2$):

$$(6) \quad \begin{aligned} f'_{0rs}(\theta') &= f_{0rs}(\theta) - \delta_{0rs}(\theta) + \lambda_0^r \bar{\lambda}_0^s \delta_{0rs}(\theta' + \omega_0), \\ \xi'_{0rs}(\theta') &= \xi_{0rs}(\theta) - \lambda_0 \gamma_{0rs}(\theta) + \lambda_0^r \bar{\lambda}_0^s \gamma_{0rs}(\theta' + \omega_0). \end{aligned}$$

On a d'autre part affecté les termes en $|\mu| |z|^2$ et $|z|^3$ dans f et Φ .

Comme précédemment, on peut résoudre avec perte de dérivabilité $n+\varepsilon'$ les équations aux différences (6) avec

$$(6') \quad \begin{aligned} f'_{020}(\theta') &\equiv f'_{002}(\theta') \equiv 0, \\ f'_{011}(\theta') &\equiv \int_0^1 f_{011}(\theta) d\theta = \omega_2, \\ \xi'_{0rs}(\theta') &\equiv 0 \quad \text{pour } r+s=2. \end{aligned}$$

On obtient ainsi (après suppression des accents) une application F_μ de la forme (4) avec

$$(7) \quad \begin{aligned} f_{020} &\equiv f_{002} \equiv 0, & f_{011} &\equiv \omega_2, & \xi_{0rs} &\equiv 0 \quad (r+s=2), \\ f_{110} (= \bar{f}_{101}), & \text{ les } \xi_{1rs} (r+s=2), & \text{ les } f_{0rs} (r+s=3) \\ & \text{ et les } \xi_{0rs} (r+s=3) & \text{ de classe } C^{l-2-n-\varepsilon'}, \\ & \text{ les } \xi_{0rs} (r+s=4) & \text{ de classe } C^{\text{inf}(l-4, l-2-n-\varepsilon')}. \end{aligned}$$

Troisième changement de variables:

$$(8) \quad \begin{aligned} \theta' &= \theta + \mu(z \delta_{110}(\theta) + \bar{z} \delta_{101}(\theta)), & \delta_{110} &= \bar{\delta}_{101}, \\ z' &= z + \mu \sum_{\substack{r+s=2 \\ r,s \geq 0}} \gamma_{1rs}(\theta) z^r \bar{z}^s; \end{aligned}$$

F_μ est transformé en $F'_\mu = (f', \Phi')$, où f' et Φ' sont de la forme (4), (7) avec les nouveaux coefficients suivants ($r+s=2$):

$$(9) \quad \begin{aligned} f'_{110}(\theta) &= f_{110}(\theta) - \delta_{110}(\theta) + \lambda_0 \delta_{110}(\theta + \omega_0), \\ \zeta'_{1rs}(\theta) &= \zeta_{1rs}(\theta) - \lambda_0 \gamma_{1rs}(\theta) + \lambda_0^2 \bar{\lambda}_0^2 \gamma_{1rs}(\theta + \omega_0). \end{aligned}$$

On a d'autre part affecté les termes en $|\mu||z|^3$ et $|\mu|^2|z|^2$ dans Φ , et les termes en $|\mu|^2|z|$ et $|\mu||z|^2$ dans f .

Comme précédemment on peut choisir les γ_{1rs} et $\delta_{110} = \bar{\delta}_{101}$ de classe $C^{l-2n-2-2\epsilon'}$ de façon que

$$(9') \quad f'_{110}(\theta) \equiv 0, \quad \zeta'_{1rs}(\theta) \equiv 0 \quad (r+s=2).$$

On obtient ainsi (après suppression des accents) une application F_μ de la forme (4) avec

$$(10) \quad \begin{aligned} f_{020} &\equiv f_{002} \equiv 0, & f_{011} &\equiv \omega_2, & \zeta_{0rs} &\equiv 0 \quad (r+s=2), \\ f_{110} &\equiv f_{101} \equiv 0, & \zeta_{1rs} &\equiv 0 \quad (r+s=2), \\ && \text{les } f_{0rs}(r+s=3) & \text{ et les } \zeta_{0rs}(r+s=3) & \text{ de classe } C^{l-2-n-\epsilon'}, \\ && \text{les } \zeta_{0rs}(r+s=4) & \text{ de classe } C^{\inf(l-4, l-2-n-\epsilon')}. \end{aligned}$$

Quatrième changement de variables:

$$(11) \quad \begin{aligned} \theta' &= \theta + \sum_{\substack{r+s=3 \\ r,s \geq 0}} \delta_{0rs}(\theta) z^r \bar{z}^s \\ z' &= z + \sum_{\substack{r+s=3 \\ r,s \geq 0}} \gamma_{0rs}(\theta) z^r \bar{z}^s \end{aligned}$$

F_μ est transformé en $F'_\mu = (f', \Phi')$ où f' et Φ' sont de la forme (4) (10) avec des nouveaux coefficients vérifiant (6) pour $r+s=3$.

On a d'autre part affecté les termes en $|z|^4$ dans Φ . On peut choisir les δ_{0rs} et les $\gamma_{0rs}(r+s=3)$ de classe $C^{l-2n-2-2\epsilon'}$ de façon que

$$(12) \quad \begin{aligned} f'_{0rs}(\theta) &\equiv 0 \quad (r+s=3), \\ \zeta'_{0rs}(\theta) &\equiv 0 \quad (r+s=3, (r,s) \neq (2,1)), \\ \zeta'_{021}(\theta) &\equiv \int_0^1 \zeta_{021}(\theta) d\theta = \lambda_0 \alpha \quad (\text{ceci définit } \alpha). \end{aligned}$$

On obtient ainsi (après suppression des accents) une application F_μ de la forme (4) avec

$$(13) \quad \begin{aligned} f_{020} &\equiv f_{002} \equiv 0, & f_{011} &\equiv \omega_2, & \zeta_{0rs} &\equiv 0 \quad (r+s=2), \\ f_{110} &\equiv f_{101} \equiv 0, & \zeta_{1rs} &\equiv 0 \quad (r+s=2), \\ f_{0rs} &\equiv 0 \quad (r+s=3), & \zeta_{0rs} &\equiv 0 \quad (r+s=3, (r,s) \neq (2,1)), \\ \zeta_{021} &\equiv \lambda_0 \alpha, \\ && \text{les } \zeta_{0rs}(r+s=4) & \text{ de classe } C^{l-2n-2-2\epsilon'}. \end{aligned}$$

Cinquième changement de variables:

$$(14) \quad \begin{aligned} \theta' &= \theta, \\ z' &= z + \sum_{\substack{r+s=4 \\ r,s \geq 0}} \gamma_{0rs}(\theta) z^r \bar{z}^s; \end{aligned}$$

F_μ est transformé en $F'_\mu = (f', \Phi')$ où f' et Φ' sont de la forme (4) (13) avec de nouveaux coefficients $\xi'_{0rs}(r+s=4)$ qui vérifient la deuxième ligne de (6) avec $r+s=4$.

On peut donc choisir les $\gamma_{0rs}(r+s=4)$ de classe $C^{l-3n-2-3\varepsilon'}$ de façon que $\xi'_{0rs}(\theta) \equiv 0$ pour $r+s=4, (r,s) \neq (0,4)$. Si $\Omega_0 \notin \frac{1}{5}\omega_0 \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{5}\mathbb{Z}$, on peut choisir γ_{004} de classe $C^{l-3n-2-3\varepsilon'}$ de façon que $\xi'_{004}(\theta) \equiv 0$; si $\Omega_0 = \frac{1}{5}q \cdot \omega_0 + \frac{1}{5}k, q \in \mathbb{Z}^n, k \in \mathbb{Z}$, on peut choisir γ_{004} de classe $C^{l-3n-2-3\varepsilon'}$ de façon que

$$\begin{aligned} \xi'_{004}(\theta) &\equiv e^{2i\pi q \cdot \theta} \int_0^1 \xi_{004}(\theta) e^{-2i\pi q \cdot \theta} d\theta \\ &\equiv e^{2i\pi q \cdot \theta} \lambda_0 \beta \quad (\text{ceci définit } \beta). \end{aligned}$$

La forme finale de F_μ est alors celle de l'énoncé de la proposition III-2.6. avec f et Φ de classe $C^{l-3n-2-3\varepsilon'}$, donc en particulier de classe C^{l-3n-3} si $\varepsilon' \in]0, \frac{1}{3}[$.

III-2.7. Bifurcation de T^n en T^{n+1} . On reprend les notations de la proposition III-2.6. (forme normale) et on suppose

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_1 > 0, \\ \operatorname{Re} \alpha < 0. \end{cases}$$

Il est commode de passer en coordonnées polaires; on note

$$\begin{aligned} z &= r e^{2i\pi\psi} \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \\ \Phi(\theta, r e^{2i\pi\psi}, \mu) &= R(\theta, \psi, r, \mu) e^{2i\pi\Psi(\theta, \psi, r, \mu)}, \\ f(\theta, r e^{2i\pi\psi}, \mu) &= \Theta(\theta, \psi, r, \mu). \end{aligned}$$

L'application F_μ devient une application de $\mathbb{R}^n \times T^1 \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n \times T^1 \times \mathbb{R}_+$ qu'on relève en une application

$$G_\mu: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

définie par

$$G_\mu(\theta, \psi, r) = (\Theta(\theta, \psi, r, \mu), \Psi(\theta, \psi, r, \mu), R(\theta, \psi, r, \mu))$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta(\theta, \psi, r, \mu) &= \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + r^2\omega_2 + O(|\mu|^2 + |\mu|r^2 + r^4), \\ \Psi(\theta, \psi, r, \mu) &= \psi + \Omega_0 + \left(\frac{\operatorname{Im} \lambda_1}{2\pi}\right) \mu + \left(\frac{\operatorname{Im} \alpha}{2\pi}\right) r^2 + \left[\frac{\operatorname{Im}(\beta e^{-2i\pi(5\psi - q \cdot \theta)})}{2\pi}\right] r^3 \\ &\quad + O(|\mu|^2 + |\mu|r^2 + r^4), \\ R(\theta, \psi, r, \mu) &= r[1 + (\operatorname{Re} \lambda_1) \mu + (\operatorname{Re} \alpha) r^2 + [\operatorname{Re}(\beta e^{-2i\pi(5\psi - q \cdot \theta)})] r^3] \\ &\quad + O(|\mu|^2 r + |\mu|r^3 + r^5). \end{aligned}$$

Remarquons que le difféomorphisme

$$(\theta, \psi, r) \rightarrow (\Theta(\theta, \psi, r, \mu), \Psi(\theta, \psi, r, \mu), r[1 + (\operatorname{Re} \lambda_1) \mu + (\operatorname{Re} \alpha) r^2])$$

obtenu en tronquant R laisse invariant, pour $\mu > 0$, le tore T de dimension $n+1$ d'équation

$$r = \sqrt{-\mu \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{\operatorname{Re} \alpha}}.$$

Il est donc naturel de faire, comme dans [16], le changement de variables (pour $\mu > 0$)

$$r = \sqrt{-\mu \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{\operatorname{Re} \alpha}} (1 + y \sqrt{\mu}), \quad R = \sqrt{-\mu \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{\operatorname{Re} \alpha}} (1 + Y \sqrt{\mu})$$

pour étudier F_μ au voisinage de T .

L'application G_μ se transforme en une application

$$H_\mu: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

définie au voisinage de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times 0$ qui, avec un léger abus de notations, s'écrit

$$H_\mu(\theta, \psi, y) = (\Theta(\theta, \psi, y, \mu), \Psi(\theta, \psi, y, \mu), Y(\theta, \psi, y, \mu))$$

avec

$$\Theta(\theta, \psi, y, \mu) = \theta + \omega_0 + \mu \omega'_1 + \mu^{\frac{3}{2}} \Theta_1(\theta, \psi, y, \mu),$$

$$\Psi(\theta, \psi, y, \mu) = \psi + \Omega_0 + \mu \Omega_1 + \mu^{\frac{3}{2}} \Psi_1(\theta, \psi, y, \mu),$$

$$Y(\theta, \psi, y, \mu) = (1 - 2\mu \operatorname{Re} \lambda_1) y + \mu \left(-\frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{\operatorname{Re} \alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{Re}(\beta e^{-2i\pi(5\psi - q \cdot \theta)}) + \mu^{\frac{3}{2}} Y_1(\theta, \psi, y, \mu)$$

où

$$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_2 \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{\operatorname{Re} \alpha},$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{Im} \lambda_1 - \operatorname{Im} \alpha \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{\operatorname{Re} \alpha} \right].$$

Les fonctions Θ_1, Ψ_1, Y_1 sont \mathbb{Z}^n -périodiques en θ et \mathbb{Z} -périodiques en ψ .

Une inspection des changements de variables conduisant à III-2.6. montre que Θ_1, Ψ_1, Y_1 sont de classe C^{l-3n-3} là où elles sont définies ($\mu > 0$ assez petit et $|y| \leq 1$ par exemple).

Nous cherchons enfin à éliminer (comme dans [13]) le terme de la forme $\mu g(\theta, \Psi)$ dans $Y(\theta, \psi, y, \mu)$ à l'aide d'un changement de variables de la forme

$$\tilde{y} = y + y_0(5\psi - q \cdot \theta), \quad \tilde{Y} = Y + y_0(5\Psi - q \cdot \Theta)$$

lorsque $5\Omega_0 = q \cdot \omega_0 + k$.

On est amené à résoudre

$$y_0(5\Psi - q \cdot \Theta) - y_0(5\psi - q \cdot \theta) + 2\mu \operatorname{Re} \lambda_1 \cdot y_0(5\psi - q \cdot \theta) + \mu g(5\psi - q \cdot \theta) = O(|\mu|^{\frac{3}{2}})$$

où

$$g(x) = - \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{\operatorname{Re} \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re} (\beta e^{-2i\pi x}).$$

Remarquons que, si y_0 est \mathbb{Z} -périodique,

$$y_0(5\Psi - q \cdot \Theta) = y_0(5\psi - q \cdot \theta) + \mu \Omega'_1 y'_0(5\psi - q \cdot \theta) + O(|\mu|^{\frac{3}{2}}),$$

où

$$\Omega'_1 = 5\Omega_1 - q \cdot \omega'_1.$$

Il suffit donc de choisir pour y_0 une solution \mathbb{Z} -périodique de l'équation différentielle

$$\Omega'_1 y'_0 + 2 \operatorname{Re} \lambda_1 y_0 + g = 0$$

ce qui est toujours possible.

Par abus de notation, nous noterons encore y, Y au lieu de \tilde{y}, \tilde{Y} ; on a donc montré la

III-2.8. Proposition. *Sous les hypothèses et avec les notations qui précèdent l'application F_μ est représentée au voisinage de T par une application $H_\mu(\theta, \psi, y)$ de \mathbb{R}^{n+2} dans \mathbb{R}^{n+2} définie pour $\mu > 0$ au voisinage de $\mathbb{R}^{n+1} \times 0$, de la forme*

$$H_\mu(\theta, \psi, y) = (\Theta(\theta, \psi, y, \mu), \Psi(\theta, \psi, y, \mu), Y(\theta, \psi, y, \mu)),$$

avec

$$\Theta(\theta, \psi, y, \mu) = \theta + \omega_0 + \mu \omega'_1 + \mu^{\frac{3}{2}} \Theta_1(\theta, \psi, y, \mu),$$

$$\Psi(\theta, \psi, y, \mu) = \Psi + \Omega_0 + \mu \Omega_1 + \mu^{\frac{3}{2}} \Psi_1(\theta, \psi, y, \mu),$$

$$Y(\theta, \psi, y, \mu) = (1 - 2\mu \operatorname{Re} \lambda_1) y + \mu^{\frac{3}{2}} Y_1(\theta, \psi, y, \mu)$$

les fonctions Θ_1, Ψ_1, Y_1 sont de classe C^{l-3n-3} par rapport aux variables (définies pour $\mu > 0$ assez petit et $|y| \leq 1$); elles sont \mathbb{Z}^n -périodiques en θ et \mathbb{Z} -périodiques en ψ .

Nous pouvons maintenant chercher un tore T_μ proche de T invariant par F_μ sous la forme du graphe d'une application $y = u(\theta, \psi)$ de $T^n \times T^1$ dans \mathbb{R} , représentée par une application \mathbb{Z}^{n+1} -périodique de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{R} .

III-2.9. Recherche de T_μ . La méthode utilisée est analogue à celle de la démonstration des théorèmes de variétés invariantes.

Pour simplifier l'écriture on note

$$(\theta, \psi) = \sigma, \quad (\Theta, \Psi) = \mathfrak{S}.$$

On a alors

$$H_\mu(\sigma, u(\sigma)) = (\mathfrak{S}(\sigma, u(\sigma), \mu), Y(\sigma, u(\sigma), \mu))$$

avec

$$\mathfrak{S}(\sigma, u(\sigma), \mu) = \sigma + \Gamma_0 + \mu \Gamma_1 + \mu^{\frac{3}{2}} \mathfrak{S}_1(\sigma, u(\sigma), \mu),$$

$$Y(\sigma, u(\sigma), \mu) = (1 - 2\mu \operatorname{Re} \lambda_1) u(\sigma) + \mu^{\frac{3}{2}} Y_1(\sigma, u(\sigma), \mu),$$

où

$$\Gamma_0 = (\omega_0, \Omega_0), \quad \Gamma_1 = (\omega'_1, \Omega_1), \quad \mathfrak{S}_1 = (\Theta_1, \Psi_1),$$

et on suppose dorénavant $l \geq 3n+4$.

Soit U l'espace métrique complet des applications u de T^{n+1} dans \mathbb{R} (qu'on identifiera à des applications \mathbb{Z}^{n+1} -périodiques de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{R}) vérifiant

- (1) $\forall \sigma \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad |u(\sigma)| \leq 1,$
 (2) $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad |u(\sigma_1) - u(\sigma_2)| \leq \|\sigma_1 - \sigma_2\|,$

où

$$\|(a_1, \dots, a_{n+1})\| = \sup_i |a_i| \quad (\text{par exemple})$$

muni de la distance

$$d(u, u') = \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^{n+1}} |u(\sigma) - u'(\sigma)|.$$

Comme précédemment nous allons montrer que l'image par H_μ du graphe de $u \in U$

$$M = \{(\sigma, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \mid y = u(\sigma)\}$$

est encore le graphe de $\hat{u} \in U$, et que l'application

$$u \mapsto \hat{u}$$

a un point fixe dans U .

On cherche \hat{u} tel que

$$Y(\sigma, u(\sigma), \mu) = \hat{u}[\mathfrak{S}(\sigma, u(\sigma), \mu)].$$

Soit

$$\lambda = \sup_{\substack{\sigma \in \mathbb{R}^{n+1} \\ |y| \leq 1 \\ \mu > 0 \text{ petit}}} \{ \|\mathfrak{S}_1(\sigma, y, \mu)\|, |Y_1(\sigma, y, \mu)|, \|D\mathfrak{S}_1(\sigma, y, \mu)\|, \|DY_1(\sigma, y, \mu)\| \}$$

où $\|D\mathfrak{S}_1(\sigma, y, \mu)\|$ désigne le sup. de la norme de $D_\sigma \mathfrak{S}_1(\sigma, y, \mu) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$ et de la norme de $D_y \mathfrak{S}_1(\sigma, y, \mu) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n+1})$, et de même pour Y_1 .

Si $2\lambda\mu^{\frac{1}{3}} < 1$ l'application

$$\mathfrak{S}_u: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

donnée par

$$\mathfrak{S}_u(\sigma) = \mathfrak{S}(\sigma, u(\sigma), \mu)$$

définit par passage au quotient un homéomorphisme lipschitzien

$$\bar{\mathfrak{S}}_u: T^{n+1} \rightarrow T^{n+1}.$$

On déduit en effet de l'expression de \mathfrak{S} que

$$\|\mathfrak{S}(\sigma_1, u(\sigma_1), \mu) - \mathfrak{S}(\sigma_2, u(\sigma_2), \mu)\| \geq (1 - 2\lambda\mu^{\frac{1}{3}}) \|\sigma_1 - \sigma_2\|$$

ce qui montre l'injectivité de \mathfrak{S}_u . Puisque \mathfrak{S}_u est de la forme «Identité + \mathbb{Z}^{n+1} -périodique» on en déduit que $\bar{\mathfrak{S}}_u$ est une application injective de classe C^1 , donc surjective (degré 1), et donc homéomorphisme (T^{n+1} compact)*.

* Alternativement, on peut inverser directement par la méthode du point fixe.

Définissons \hat{u} par

$$\hat{u}(\sigma) = Y(\mathfrak{S}_u^{-1}(\sigma)), u(\mathfrak{S}_u^{-1}(\sigma), \mu)$$

et montrons que $\hat{u} \in U$ pour μ assez petit:

$$|\hat{u}(\sigma)| \leq 1 - 2\mu \operatorname{Re} \lambda_1 + \lambda \mu^{\frac{3}{2}} \leq 1$$

pour μ assez petit, et

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\sigma_1) - \hat{u}(\sigma_2)| &\leq (1 - 2\mu \operatorname{Re} \lambda_1 + 2\lambda \mu^{\frac{3}{2}}) \|\mathfrak{S}_u^{-1}(\sigma_1) - \mathfrak{S}_u^{-1}(\sigma_2)\| \\ &\leq \frac{1 - 2\mu \operatorname{Re} \lambda_1 + 2\lambda \mu^{\frac{3}{2}}}{1 - 2\lambda \mu^{\frac{3}{2}}} \|\sigma_1 - \sigma_2\| \\ &\leq \|\sigma_1 - \sigma_2\| \end{aligned}$$

dès que μ est assez petit. Il reste à montrer que l'application de U dans U qui à u associe \hat{u} est une contraction.

Notons

$$\sigma_i = \mathfrak{S}_{u_i}^{-1}(\sigma), \quad i = 1, 2.$$

On a

$$\begin{aligned} |\hat{u}_1(\sigma) - \hat{u}_2(\sigma)| &\leq (1 - 2\mu \operatorname{Re} \lambda_1) |u_1(\sigma_1) - u_2(\sigma_2)| \\ &\quad + \lambda \mu^{\frac{3}{2}} [\|\sigma_1 - \sigma_2\| + |u_1(\sigma_1) - u_2(\sigma_2)|]. \end{aligned}$$

On déduit d'autre part de l'expression de \mathfrak{S} :

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\| \leq \lambda \mu^{\frac{3}{2}} (\|\sigma_1 - \sigma_2\| + |u_1(\sigma_1) - u_2(\sigma_2)|).$$

Enfin

$$|u_1(\sigma_1) - u_2(\sigma_2)| \leq \|u_1 - u_2\| + \|\sigma_1 - \sigma_2\|,$$

d'où

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\| \leq \frac{\lambda \mu^{\frac{3}{2}}}{1 - 2\lambda \mu^{\frac{3}{2}}} \|u_1 - u_2\|,$$

et

$$|\hat{u}_1(\sigma) - \hat{u}_2(\sigma)| \leq \frac{(1 - 2\mu \operatorname{Re} \lambda_1 + \lambda \mu^{\frac{3}{2}})(1 - \lambda \mu^{\frac{3}{2}}) + \lambda^2 \mu^3}{1 - 2\lambda \mu^{\frac{3}{2}}} \|u_1 - u_2\|.$$

Donc

$$|\hat{u}_1(\sigma) - \hat{u}_2(\sigma)| \leq \eta \|u_1 - u_2\|$$

avec $\eta < 1$ si μ est assez petit. Il existe donc un unique point fixe $u_\mu^* = \hat{u}_\mu^*$ auquel correspond un tore T_μ de dimension $n+1$ invariant par \bar{F}_μ .

III-2.10. Remarques. (i) On peut refaire tout ce qui précède (avec éventuellement μ plus petit) en remplaçant l'espace U par l'espace U_m des applications u de T^{n+1} dans \mathbb{R} de classe C^m ($m \leq l - 3n - 4$) dont les dérivées jusqu'à l'ordre m soient majorées en norme par 1 et dont les dérivées d'ordre m soient lipschitziennes de rapport 1, et en modifiant la définition de λ de façon analogue; ceci prouve que le point fixe u_μ^* est, pour μ assez petit, dans U_{l-3n-4} .

(ii) Le processus itératif fournissant u_μ^* converge uniformément pour μ dans un petit intervalle fermé ne contenant pas 0 ce qui montre la dépendance continue de u_μ^* par rapport au paramètre μ (voir [12]).

Nous pouvons maintenant énoncer le

III-2.11. Théorème*. Avec les notations du début de III-2, on suppose réalisées les hypothèses H'_1, H''_2 avec $l \geq 3n + 4$. On suppose de plus que

$$\frac{d}{d\mu} \left[\int_0^1 \text{Log} |\det A_\mu(\theta)| d\theta \right]_{\mu=0} > 0, \quad \text{Re } \alpha \neq 0$$

(pour cette dernière hypothèse, qui suppose les notations de III-2.6., voir la remarque III-2.12).

(i) Si $\text{Re } \alpha < 0$, il existe pour $\mu > 0$ assez petit une fonction $u_\mu^* : T^n \times T^1 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{l-3n-4,1}$ telle que le tore de dimension $n+1$

$$T_\mu = \left\{ (\theta, r e^{2i\pi\psi}) \in T^n \times \mathbb{C}; r = \sqrt{-\mu \frac{\text{Re } \lambda_1}{\text{Re } \alpha}} [1 + \sqrt{\mu} u_\mu^*(\theta, \psi)] \right\}$$

soit un tore invariant stable de \bar{F}_μ (supposé mis sous la forme normale III-2.6.) dépendant continûment de μ ; le domaine d'attraction de T_μ est au moins d'une épaisseur de l'ordre de μ .

(ii) Si $\text{Re } \alpha > 0$ on a la même conclusion en remplaçant $\sqrt{\mu}$ par $\sqrt{-\mu}$ dans la formule donnant T_μ , stable par instable (répulsif), et $\mu > 0$ par $\mu < 0$.

Démonstration. Le (i) découle immédiatement de ce qui précède: le fait que $u \mapsto \hat{u}$ soit une contraction est en fait plus fort que la stabilité du tore invariant T_μ . L'épaisseur du domaine d'attraction peut être minorée car les fonctions de U vérifient $|y| \leq 1$. Pour traiter le (ii) on applique la démonstration de (i) à F_μ^{-1} , ce qui fournit pour $\mu < 0$ un tore T_μ invariant stable de \bar{F}_μ^{-1} .

L'application $u \mapsto \hat{u}$ relative à F_μ^{-1} étant une contraction, on voit qu'étant données $A, \varepsilon > 0$, il existe p_0 entier > 0 tel que l'image par \bar{F}_μ^p du ε -voisinage de T_μ contienne, pour $p \geq p_0$, le A -voisinage de T_μ , ce qui est la forme la plus forte d'instabilité.

III-2.12. Remarques. (i) On pourrait écrire intrinsèquement ce que signifie $\text{Re } \alpha \neq 0$ mais cela n'a pas grand intérêt: il est plus important de remarquer que $\text{Re } \alpha$ est le coefficient du premier terme non linéaire «significatif» (c'est-à-dire apparaissant dans une forme normale formelle). La condition $\text{Re } \alpha < 0$ correspond à l'attractivité vague de 0 pour $\mu = 0$ de RUELLE et TAKENS dans [18]: on a effectivement dans III-2.6.:

$$|\Phi(\theta, z, 0)| \leq |z| \cdot (1 + \text{Re } \alpha |z|^2 + O(|z|^3))$$

et

$$1 + \text{Re } \alpha |z|^2 + O(|z|^3) < 1 \quad \text{si } \text{Re } \alpha < 0 \text{ et } |z| \text{ petit.}$$

(ii) Lorsque $\text{Re } \alpha = 0$ la form normale approchée donnée en III-2.6. ne suffit pas; si on renforce H'_2 en exigeant la condition diophantienne sur $r\Omega_0 + q \cdot \omega_0$ pour $r = 0, 1, 2, \dots, 4p+3$ et en excluant les valeurs $\frac{a}{b}$ avec $b = 2, 3, \dots, 4p+3$

* voir aussi V-3.1.

et $(a, b) = 1$ pour Ω_0 , on arrive, après des changements de variables perdant de la différentiabilité, à une forme normale approchée pour F_μ du type (notations de III-2.7.)

$$\begin{aligned} \Theta &= \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + r^2\omega_2 + \dots + r^{2p}\omega_{2p} + O(|\mu|^2 + |\mu|r^2 + r^{2p+2}), \\ \Psi &= \psi + \Omega_0 + \left(\frac{\text{Im } \lambda_1}{2\pi}\right)\mu + \left(\frac{\text{Im } \alpha}{2\pi}\right)r^2 + \dots + \Omega_{2p}r^{2p} + O(|\mu|^2 + |\mu|r^2 + r^{2p+2}), \\ R &= r[1 + (\text{Re } \lambda_1)\mu + \lambda_2\mu^2 + (\text{Re } \alpha)r^2 + a_5r^4 + \dots + a_{4p+1}r^{4p} \\ &\quad + \mu b_3r^2 + \dots + \mu b_{2p+1}r^{2p}] + O(|\mu|^3r + |\mu|^2r^3 + |\mu|r^{2p+3} + r^{4p+3}). \end{aligned}$$

Si $\text{Re } \alpha = a_5 = \dots = a_{2p-1} = 0$, et $a_{2p+1} \neq 0$, cette forme normale approchée «arrondi» suffisamment le tore invariant approché pour que la méthode précédente s'applique et fournisse un tore invariant T_μ (voir au chapitre IV un problème analogue).

Si tous les coefficients a_{2p+1} sont nuls, il n'est pas clair qu'un changement de variables transformant R en $r[1 + \text{Re } \lambda_1\mu + O(|\mu|^2 + |\mu|r)]$ existe. Le problème géométrique est ouvert.

III-2.13. Il reste à remarquer que l'existence d'un tore invariant T_μ de dimension $n + 1$ pour le difféomorphisme \bar{F}_μ correspond à l'existence d'un tore invariant de dimension $n + 2$ pour l'équation différentielle E_μ et que les stabilités se correspondent.

Cela vient de ce que le quotient de $T^{n+1} \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence

$$(x, 1) = (\rho_\mu(x), 0)$$

est un tore de dimension $n + 2$ (avec sa structure différentiable ordinaire), où ρ_μ est la restriction de \bar{F}_μ à T_μ . Remarquons en effet que l'application u_μ^* définit une conjugaison entre ρ_μ et l'application qui à σ fait correspondre

$$\mathfrak{S}(\sigma, u_\mu^*(\sigma), \mu) = \sigma + \Gamma_0 + \mu\Gamma_1 + \mu^3\mathfrak{S}(\sigma, u_\mu^*(\sigma), \mu).$$

Cette dernière application définissant un difféomorphisme manifestement isotope à la rotation \bar{R}_{Γ_0} et donc à l'identité, la conclusion suit.

Chapitre IV. Résonances

IV-1. Réduction à la Dimension un ou à la Dimension Deux

Nous étudions dans ce chapitre les cas laissés de côté au chapitre III, c'est-à-dire ceux où $r\Omega_0 \in \omega_0 \cdot \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}$, $r = 1, 2, 3$, ou 4.

Plus précisément, les notations étant celles introduites au début du chapitre III, nous faisons les hypothèses suivantes ($r = 1, 2, 3$ ou 4).

(H₁): $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_{\omega_0} \circ \bar{h}$, $\bar{h} \in \text{Diff}_0^1(T^n)$, \bar{R}_{ω_0} ergodique,

($\bar{H}_2(r)$): $S_1(\bar{F}_0)$ contient une valeur propre de module un, $\lambda_0 = e^{2i\pi\Omega_0}$ qui vérifie

(1) $\Omega_0 \in \frac{1}{r}\omega_0 \cdot \mathbb{Z}^n + \frac{1}{r}\mathbb{Z}$ (on suppose que r est le plus petit entier ayant cette propriété).

(2) λ_0 est simple dans le sens introduit dans l'hypothèse (H₂) en III-1, à la différence près que si $r=1$ ou $r=2$, le fibré ξ_2 a pour fibre \mathbb{R} (et n'est pas forcément trivial si $r=2$).

Ces hypothèses nous permettent, comme en III-1., d'appliquer le théorème de variété centrale II-1.7. (éventuellement après passage à l'image réciproque par un revêtement fini de T^n lorsque $r=2$) pour ramener l'étude de la bifurcation à une étude dans $T^n \times \mathbb{R}$ ou $T^n \times \mathbb{R}^2$. (Nous verrons en traitant le cas $r=2$ que si ξ_2 n'est pas trivial, on se ramène en fait à une étude dans une variété difféomorphe à l'espace total de ξ_2 .)

IV-2. Cas $r=1$ et $r=2$

Il est plus naturel de diviser ces cas suivant la trivialité ou non du fibré ξ_2 de fibre \mathbb{R} et de base T^n , c'est-à-dire, en notant $2\Omega_0 = q \cdot \omega_0 + k$,

- (i) $q \in 2\mathbb{Z}^n$,
- (ii) $q \notin 2\mathbb{Z}^n$.

Commençons par l'étude de (i) (nous verrons que le cas (ii) peut en fait s'en déduire): on se ramène à l'étude d'une famille à un paramètre de difféomorphismes locaux (au voisinage de $T^n \times 0$)

$$\bar{F}_\mu: T^n \times \mathbb{R}, T^n \times 0 \rightarrow T^n \times \mathbb{R}, T^n \times 0$$

représentée par

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

définie au voisinage de $\mathbb{R}^n \times 0 \times 0$ par

$$\begin{aligned} F(\theta, x, \mu) &= (f(\theta, x, \mu), \Phi(\theta, x, \mu), \mu) \\ f(\theta, x, \mu) &= \theta + \omega_0 + O(|\mu| + |x|), \\ \Phi(\theta, x, \mu) &= (-1)^k x + O(|\mu| |x| + |x|^2). \end{aligned}$$

IV-2.1. Proposition (*forme normale approchée*). *Avec les notations qui précèdent, on suppose de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$ assez petit tel que*

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n - 0, \quad \exists C > 0$$

telle que

$$|q \cdot \omega_0 - p| > \frac{C}{|q|^{n+\varepsilon}}.$$

*Si F est suffisamment dérivable, il existe un changement de coordonnées (avec perte de dérivabilité) au voisinage de $T^n \times 0 \times 0$ transformant F en une application de la même forme, où f et Φ sont données par les formules suivantes (**) si k est pair, (*) si k est impair):*

$$\begin{aligned} f(\theta, x, \mu) &= \theta + \omega_0 + \mu \omega_1 + \beta_1 x + \dots + \beta_{s-1} x^{s-1} + O(|\mu|^2 + |\mu| |x| + |x|^s) \\ (**) \quad \Phi(\theta, x, \mu) &= (1 + \mu \lambda_1 + \mu^2 \lambda_2) x + \alpha_s x^s + \dots + \alpha_{2s-1} x^{2s-1} + \mu \alpha'_2 x^2 + \dots + \mu \alpha'_s x^s \\ &\quad + O(|\mu|^3 |x| + |\mu|^2 |x|^2 + |\mu| |x|^{s+1} + |x|^{2s}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(\theta, x, \mu) &= \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_{2s} x^{2s} + O(|\mu|^2 + |\mu| |x|^2 + |x|^{2s+2}) \\
 \Phi(\theta, x, \mu) &= -(1 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2)x + \alpha_{2s+1} x^{2s+1} + \dots + \alpha_{4s+1} x^{4s+1} \\
 (*) \quad &+ \mu\alpha'_3 x^3 + \dots + \mu\alpha'_{2s+1} x^{2s+1} \\
 &+ O(|\mu|^3 |x| + |\mu|^2 |x|^3 + |\mu| |x|^{2s+3} + |x|^{4s+3}).
 \end{aligned}$$

Démonstration. Analogue à celle de III-2.6. Si k est pair on ne peut faire mieux que rendre indépendants de θ un nombre fini de coefficients dans Φ et f ; si k est impair, on peut en plus supprimer les puissances impaires (resp. paires) de x dans le début du développement de Taylor de f (resp. Φ).

Nous énonçons maintenant les théorèmes de bifurcation correspondant à ces situations: l'hypothèse $\lambda_1 > 0$ a une interprétation intrinsèque analogue à celle donnée en III-2.2. et implique la perte de stabilité du tore invariant $T^n \times 0$ lorsque μ devient positif.

IV-2.2. Théorème ($q \in 2\mathbb{Z}^n, k \in 2\mathbb{Z}$, donc $\Omega_0 \in \omega_0 \cdot \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}$). Avec les notations de IV-2.1.(**) on suppose que $\lambda_1 > 0$ et que $\alpha_s \neq 0$. Si s est pair, il existe pour tout μ non nul assez voisin de 0 un tore de dimension n contenu dans $T^n \times (\mathbb{R} - 0)$ invariant par \bar{F}_μ . Ce tore est asymptotiquement stable si $\mu > 0$, instable si $\mu < 0$. Si s est impair, et si $\alpha_s < 0$ (resp. $\alpha_s > 0$) il existe pour $\mu > 0$ (resp. $\mu < 0$) deux tores de dimension n contenus respectivement dans $T^n \times \mathbb{R}_+$ et $T^n \times \mathbb{R}_-$ invariants par \bar{F}_μ . Ces tores sont asymptotiquement stables (resp. instables). Dans tous les cas, les tores invariants sont donnés en première approximation par une équation de la forme

$$x = O(|\mu|^{\frac{1}{s-1}}) \text{ indépendant de } \theta.$$

Chacun de ces tores invariants par \bar{F}_μ correspond à un tore invariant de dimension $n+1$ pour l'équation différentielle (E_μ) initiale.

Démonstration (esquisse). On commence par chercher un tore invariant par l'application obtenue à partir de \bar{F}_μ en ne gardant dans (**) que les termes indépendants de θ ; autrement dit, on cherche à résoudre l'équation

$$\mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \alpha_s x^{s-1} + \dots + \alpha_{2s-1} x^{2s-2} + \mu\alpha'_2 x + \dots + \mu\alpha'_s x^{s-1} = 0.$$

Si s est pair, cette équation admet pour μ voisin de 0 une unique solution $x_0(\mu)$ de la forme

$$x_0(\mu) = \left(-\frac{\mu\lambda_1}{\alpha_s} \right)^{\frac{1}{s-1}} + O(|\mu|^{\frac{2}{s-1}}).$$

Si s est impair, et si $\alpha_s < 0$ (resp. $\alpha_s > 0$) cette équation admet pour μ positif voisin de 0 (resp. μ négatif voisin de 0) deux solutions $x_0^\pm(\mu)$ de la forme

$$x_0^\pm(\mu) = \pm \left(-\frac{\mu\lambda_1}{\alpha_s} \right)^{\frac{1}{s-1}} + O(|\mu|^{\frac{2}{s-1}}).$$

On fait comme en III-2.7. un changement de variables:

$$x = x_0(\mu)(1 + \mu y), \quad y \in [-1, +1].$$

L'application F_μ se transforme en une application

$H_\mu: T^n \times [-1, +1] \rightarrow T^n \times \mathbb{R}$ de la forme $H_\mu(\theta, y) = (\Theta(\theta, y, \mu), Y(\theta, y, \mu))$,
avec

$$\Theta(\theta, y, \mu) = \theta + \omega(\mu) + |\mu|^{1 + \frac{1}{s-1}} \Theta_1(\theta, y, \mu),$$

$$Y(\theta, y, \mu) = [1 - (s-1)\lambda_1\mu]y + |\mu|^{1 + \frac{1}{s-1}} Y_1(\theta, y, \mu).$$

Les fonctions Θ_1, Y_1 sont régulières par rapport à $\theta, y, |\mu|^{\frac{1}{s-1}}$ pour $\theta \in T^n, y \in [-1, +1], |\mu|$ assez petit si s est pair [mais seulement $\mu > 0$ (resp. $\mu < 0$) si s est impair et $\alpha_s < 0$ (resp. $\alpha_s > 0$)].

La méthode de point fixe s'applique alors pour fournir les tores invariants sous la forme $y = u(\theta)$ et pour étudier leur stabilité.

IV-2.3. Théorème ($q \in 2\mathbb{Z}^n, k$ impair, donc $\Omega_0 \in \omega_0 \cdot \mathbb{Z}^n + (\frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z})$). Avec les notations de IV-2.1.(*) on suppose que $\lambda_1 > 0$ et que $\alpha_{2s+1} \neq 0$. Si $\alpha_{2s+1} > 0$ (resp. si $\alpha_{2s+1} < 0$) il existe pour $\mu > 0$ (resp. $\mu < 0$) assez voisin de 0 un couple de tores invariants de dimension n (l'un contenu dans $T^n \times \mathbb{R}_+$, l'autre contenu dans $T^n \times \mathbb{R}_-$) globalement invariant par \bar{F}_μ . Ce couple est asymptotiquement stable (resp. instable) ce qui signifie que chaque tore, invariant par $(\bar{F}_\mu)^2$, est asymptotiquement stable (resp. instable). Chacun des tores est donné en première approximation par une équation de la forme

$$x = O(|\mu|^{\frac{1}{2s}}) \quad \text{indépendant de } \theta.$$

A ce couple invariant par \bar{F}_μ correspond un unique tore de dimension $n+1$ invariant par l'équation différentielle E_μ et revêtant deux fois le tore invariant initial. Bien entendu cette situation ne se produit que si $\dim E > 1$.

Démonstration (esquisse). On calcule

$$F_\mu^2(\theta, x) = (f^{(2)}(\theta, x, \mu), \Phi^{(2)}(\theta, x, \mu)),$$

$$f^{(2)}(\theta, x, \mu) = \theta + 2\omega_0 + 2\mu\omega_1 + 2\beta_2 x^2 + \dots + 2\beta_{2s} x^{2s} + O(|\mu|^2 + |\mu| |x|^2 + |x|^{2s+2}),$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(\theta, x, \mu) &= [1 + 2\mu\lambda_1 + \mu^2(\lambda_1^2 + 2\lambda_2)]x - 2\alpha_{2s+1}x^{2s+1} - \dots - 2\alpha_{4s-1}x^{4s-1} \\ &\quad - [2\alpha_{4s+1} + (2s+1)\alpha_{2s+1}^2]x^{4s+1} - 2\mu\alpha_3x^3 - \dots - 2\mu\alpha_{2s-1}x^{2s-1} \\ &\quad - 2\mu[\alpha'_{2s+1} + \alpha_{2s+1}(s+1)\lambda_1]x^{2s+1} \\ &\quad + O(|\mu|^3|x| + |\mu|^2|x|^3 + |\mu||x|^{2s+3} + |x|^{4s+3}). \end{aligned}$$

On procède comme au théorème précédent pour trouver deux tores invariants par \bar{F}_μ^2 , dont l'équation s'écrit en première approximation

$$x = \pm x_0(\mu), \quad x_0(\mu) = O(|\mu|^{\frac{1}{2s}}) \quad \text{indépendant de } \theta.$$

L'image par \bar{F}_μ d'un tore invariant par \bar{F}_μ^2 est encore un tore invariant par \bar{F}_μ^2 . Si l'équation du tore est en première approximation $x = \pm x_0(\mu)$, celle de son image par \bar{F}_μ est en première approximation $x = \mp x_0(\mu)$.

On en déduit le théorème grâce à l'unicité de la solution du problème de point fixe qui a fourni les tores invariants.

IV-2.4. Nous pouvons aborder maintenant le cas (ii) où le fibré ξ_2 n'est pas trivial: $\Omega_0 \in \frac{1}{2}\omega_0 \cdot (\mathbb{Z}^n \setminus 2\mathbb{Z}^n) + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Notons $\bar{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\mathbb{Z}^n$; on a les applications naturelles de revêtement: $\mathbb{R}^n \rightarrow \bar{T}^n \rightarrow T^n$; aux applications

$$F: \mathbb{R}^n \times E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times E \times \mathbb{R}, \quad G_\mu, F_\mu: \mathbb{R}^n \times E \rightarrow \mathbb{R}^n \times E$$

correspondent des applications

$$\bar{F}: \bar{T}^n \times E \times \mathbb{R} \rightarrow \bar{T}^n \times E \times \mathbb{R}, \quad \bar{G}_\mu, \bar{F}_\mu: \bar{T}^n \times E \rightarrow \bar{T}^n \times E$$

qui revêtent respectivement $\bar{F}, \bar{G}_\mu, \bar{F}_\mu$.

On déduit de II-3.6. que le sous-fibré ξ_2 de $T^n \times E$ invariant par \bar{G}_0 a pour image réciproque dans $\bar{T}^n \times E$ un sous-fibré $\bar{\xi}_2$ trivial, invariant par \bar{G}_0 .

Quitte à stabiliser $T^n \times E$ comme en III-1., on peut alors supposer qu'il existe un isomorphisme fibré

$$\Sigma: \bar{T}^n \times (E_1 \oplus \mathbb{R}) \rightarrow \bar{T}^n \times E$$

tel que $\bar{\xi}_1 = \Sigma(\bar{T}^n \times E_1)$, $\bar{\xi}_2 = \Sigma(\bar{T}^n \times \mathbb{R})$ (décomposition de $\bar{T}^n \times E$ en somme de sous-fibrés invariants par \bar{G}_0). On en déduit comme en III-1. l'existence d'une sous-variété $\bar{\mathcal{V}}$ de $\bar{T}^n \times E \times \mathbb{R}$ difféomorphe à $\bar{T}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ localement invariante par \bar{F} et localement attractante (on applique le théorème II-1.7. après le changement de coordonnées défini par $\Sigma \times \text{id}$).

Remarquons maintenant que \bar{F} commute avec les translations en θ par un élément de \mathbb{Z}^n . Si on fait la démonstration de II-1.7. en utilisant la conjuguée par $\Sigma \times \text{id}$ d'une application déduite de \bar{F} par une troncation en la variable $x \in E$ et commutant avec les translations de \mathbb{Z}^n , on obtient une variété $\bar{\mathcal{V}}$ invariante par ces translations; en effet, le point fixe unique de la contraction C se trouve dans le fermé invariant de $A_{M,1,1}^0$ formé des applications $\varphi: \bar{T}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow E_1$ dont le graphe a son image par $\Sigma \times \text{id}$ invariante par les translations de \mathbb{Z}^n .

On obtient ainsi au quotient une sous-variété $\bar{\mathcal{V}}$ de $T^n \times E \times \mathbb{R}$ invariante par \bar{F} et localement attractante; les sections par les plans $\mu = \text{constante}$ sont localement des sous-variétés $\bar{\mathcal{V}}_\mu$ de $T^n \times E$: $\bar{\mathcal{V}}_\mu$ est localement invariante par \bar{F}_μ et localement attractante; elle est difféomorphe à l'espace total de ξ_2 car le difféomorphisme naturel de l'espace total de $\bar{\xi}_2$ sur $\bar{\mathcal{V}}_\mu$ passe au quotient.

Etudions maintenant les tores invariants par \bar{F}_μ trouvés dans l'étude du cas (i); remarquons tout d'abord que la non-trivialité de ξ_2 équivaut à l'existence d'un élément $q \in \mathbb{Z}^n$ tel que la translation

$$\bar{R}_q: \bar{T}^n \times E \rightarrow \bar{T}^n \times E$$

définie par

$$\bar{R}_q(\theta, x) = (\theta + q, x)$$

envoie $\Sigma(\bar{T}^n \times \mathbb{R}_+) \subset \bar{\xi}_2$ sur $\Sigma(\bar{T}^n \times \mathbb{R}_-) \subset \bar{\xi}_2$ (voir fig. 2). On en déduit que cette translation échange les 2 composantes connexes de $\bar{\mathcal{V}} - \bar{T}^n \times 0$; ceci implique que dans la forme normale approchée de \bar{F}_μ (voir IV-2.1.) le premier terme non

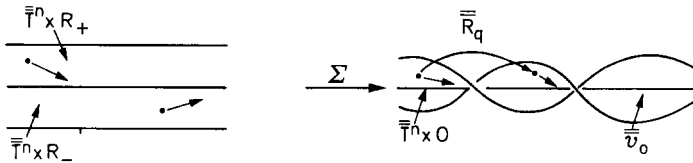


Fig. 2

nul de la forme $\alpha_i x^i$ dans $\Phi(\theta, x, \mu)$ vérifie «*t* impair». En effet, le caractère attractant ou répulsif du tore invariant $T^n \times 0$ pour \bar{F}_0 doit être le même dans chacune des composantes connexes de $\bar{\mathcal{V}}_0$ (voir figure); on peut également raisonner analytiquement en calculant les moyennes des coefficients.

Enfin, puisqu'en première approximation le conjugué par Σ de la restriction de \bar{R}_q à $\bar{\mathcal{V}}_\mu$ s'écrit

$$(\theta, x) \mapsto (\theta + q, -x)$$

l'argument d'unicité des points fixes montre que le couple de tores invariants par \bar{F}_μ fourni par l'étude du cas (i) donne au quotient un unique tore dans $\bar{\mathcal{V}}_\mu$ invariant par \bar{F}_μ et revêtant deux fois $T^n \times 0$.

On laisse au lecteur le soin d'énoncer un théorème analogue à IV-2.2. et IV-2.3. en remarquant qu'il n'y a plus de raison de distinguer le cas où k est pair du cas où k est impair. Les dessins de la fig. 3 résument la situation dans le cas où $n = 1$: les cycles asymptotiquement stables sont en plein, les instables en pointillé; on n'a représenté que le cas «supercritique» (le cas «sous-critique» s'obtient en inversant pleins et pointillés et en changeant μ en $-\mu$).

IV-3. Cas $r = 3$

On suppose que les hypothèses (H'_1) et (H'_2) du paragraphe III-2. sont vérifiées, ce qui permet d'appliquer le lemme III-2.2. relatif au changement de stabilité du tore invariant.

On suppose enfin qu'il existe $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $3\Omega_0 + q \cdot \omega_0 \in \mathbb{Z}$; le lemme II-3.1. nous permet de supposer que les q_i sont des 0, des 1, ou des -1 .

Remarquons que la partie de l'hypothèse (H'_2) de III-2.5. relative au cas $r = 4$ est alors automatiquement vérifiée.

Les changements de variables du III-2.5. nous ramènent à l'étude de

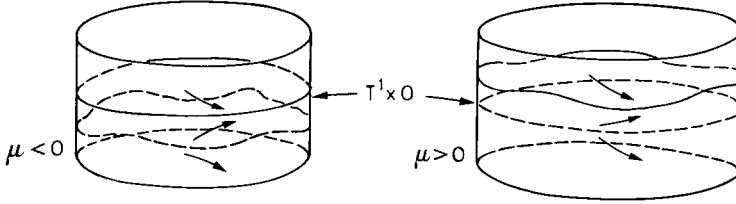
$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$$

définie au voisinage de $\mathbb{R}^n \times 0 \times 0$ par

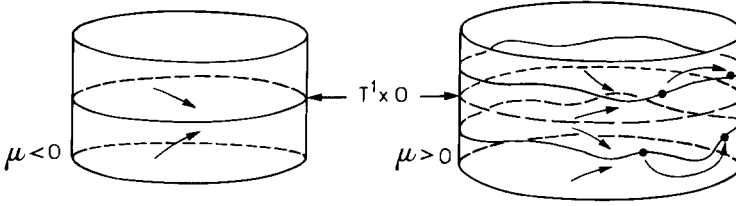
$$\begin{aligned}
 F(\theta, z, \mu) &= (f(\theta, z, \mu), \Phi(\theta, z, \mu)) \\
 f(\theta, z, \mu) &= \theta + \omega_0 + \mu \omega_1 + \mu^2 \omega'_1 + |z|^2 \omega_2 + O(|\mu|^3 + |\mu| |z|^2 + |z|^3), \\
 (1) \quad \Phi(\theta, z, \mu) &= \lambda_0 [(1 + \mu \lambda_1 + \mu^2 \lambda_2) z + (\alpha_0 + \mu \alpha_1) e^{-2i\pi q \cdot \theta} \bar{z}^2 + \alpha_2 z |z|^2] \\
 &\quad + O(|\mu|^3 |z| + |\mu|^2 |z|^2 + |\mu| |z|^3 + |z|^4)
 \end{aligned}$$

pourvu qu'initialement F soit suffisamment dérivable. (Remarquer que $\lambda_0^{-1} \bar{\lambda}_0^2 (e^{2i\pi q \cdot \omega_0}) = 1$.)

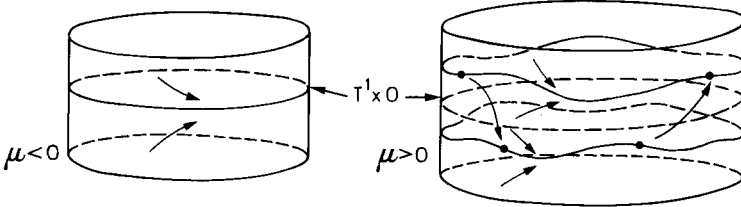
ξ_2 trivial, k pair, s pair:



ξ_2 trivial, k pair, s impair:



ξ_2 trivial, k impair:



ξ_2 non trivial (Moebius):

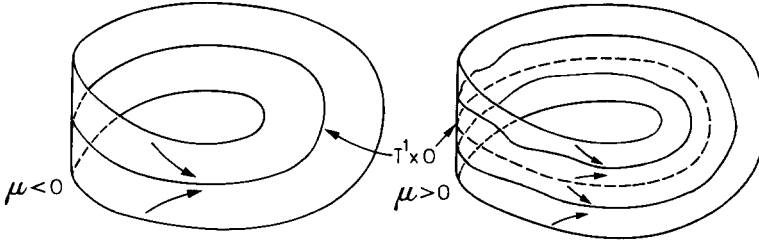


Fig. 3

En coordonnées polaires (notations du III-2.7.) on obtient

$$\Theta(\theta, \psi, r, \mu) = \theta + \omega_0 + \mu \omega_1 + \mu^2 \omega'_1 + r^2 \omega_2 + O(|\mu|^3 + |\mu| r^2 + r^3),$$

$$\begin{aligned} \Psi(\theta, \psi, r, \mu) = & \psi + \Omega_0 + \frac{1}{2\pi} (\text{Im} [\alpha_0 e^{-2i\pi(q \cdot \theta + 3\psi)}]) r \\ & + \frac{1}{2\pi} (\text{Im} \lambda_1) \mu + \Omega_{20} \mu^2 + \Omega_{11} (q \cdot \theta + 3\psi) \mu r \\ & + \Omega_{02} (q \cdot \theta + 3\psi) r^2 + O((|\mu| + r)^3), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} R(\theta, \psi, r, \mu) = & (1 + \mu \text{Re} \lambda_1) r + (\text{Re} [\alpha_0 e^{-2i\pi(q \cdot \theta + 3\psi)}]) r^2 \\ & + \rho_{20} \mu^2 r + \rho_{11} (q \cdot \theta + 3\psi) \mu r^2 + \rho_{02} (q \cdot \theta + 3\psi) r^3 + O[r(|\mu| + r)^3] \end{aligned}$$

où $\rho_{20}, \rho_{11}, \rho_{02}, \Omega_{20}, \Omega_{11}, \Omega_{02}$ sont déterminés par le système

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \rho_{20} + 2i\pi\Omega_{20} - \frac{1}{2}(\text{Im } \lambda_1)^2 + i(\text{Re } \lambda_1) \cdot (\text{Im } \lambda_1), \\ \alpha_1 e^{-2i\pi(q \cdot \theta + 3\psi)} &= \rho_{11} + 2i\pi\Omega_{11} - (\text{Im } \lambda_1) \cdot (\text{Im}[\alpha_0 e^{-2i\pi(q \cdot \theta + 3\psi)}]), \\ \alpha_2 &= \rho_{02} + 2i\pi\Omega_{02} - \frac{1}{2}(\text{Im}[\alpha_0 e^{-2i\pi(q \cdot \theta + 3\psi)}]) \\ &\quad + i(\text{Im}[\alpha_0 e^{-2i\pi(q \cdot \theta + 3\psi)}]) \cdot (\text{Re}[\alpha_0 e^{-2i\pi(q \cdot \theta + 3\psi)}]).\end{aligned}$$

On supposera dans la suite que $\alpha_0 \neq 0$: Remarquons que l'application F «tronquée» obtenue à partir des formules (2) en oubliant les restes $O(\dots)$ passe au quotient par le revêtement à trois feuillets de $T^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ sur $T^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, ramifié le long de $T^n \times 0 \times \mathbb{R}$, défini par

$$(\theta, \psi, r, \mu) \mapsto (\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) \quad \text{avec} \quad \tilde{\theta} = \theta, \quad \tilde{\psi} = q \cdot \theta + 3\psi, \quad \tilde{r} = r.$$

Nous noterons

$$(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) \mapsto (\tilde{\Theta}, \tilde{\Psi}, \tilde{R}, \mu)$$

l'application obtenue au quotient; elle s'écrit

$$\begin{aligned}(3) \quad \tilde{\Theta}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) &= \tilde{\theta} + \omega_0 + \mu\omega_1 + \mu^2\omega'_1 + \tilde{r}^2\omega_2, \\ \tilde{\Psi}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) &= \tilde{\psi} + \tilde{\omega}_1\mu + \tilde{\omega}_2\mu^2 + \frac{3}{2\pi}(\text{Im}[\alpha_0 e^{-2i\pi\tilde{\psi}}])\tilde{r} \\ &\quad + \tilde{\Omega}_{11}(\tilde{\psi})\mu\tilde{r} + \tilde{\Omega}_{02}(\tilde{\psi})\tilde{r}^2, \\ \tilde{R}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) &= (1 + \mu \text{Re } \lambda_1)\tilde{r} + (\text{Re}[\alpha_0 e^{-2i\pi\tilde{\psi}}])\tilde{r}^2 + \rho_{20}\mu^2\tilde{r} \\ &\quad + \rho_{11}(\tilde{\psi})\mu\tilde{r}^2 + \rho_{02}(\tilde{\psi})\tilde{r}^3\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= q \cdot \omega_1 + \frac{3}{2\pi} \text{Im } \lambda_1, \quad \tilde{\omega}_2 = 3\Omega_{20} + q \cdot \omega'_1, \\ \tilde{\Omega}_{11}(\tilde{\psi}) &= 3\Omega_{11}(\tilde{\psi}), \quad \tilde{\Omega}_{02}(\tilde{\psi}) = 3\Omega_{02}(\tilde{\psi}) + q \cdot \omega_2.\end{aligned}$$

Cherchons, pour chaque $\mu \neq 0$, un tore T^n invariant par l'application obtenue en fixant μ ; on cherche ce tore sous la forme d'une solution $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0(\mu)$, $\tilde{r} = \tilde{r}_0(\mu)$ du système d'équations

$$(3) \quad \begin{aligned}\tilde{\Psi}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) &= \tilde{\psi}, \\ \tilde{R}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) &= \tilde{r}.\end{aligned}$$

On voit facilement que ce système admet une solution unique analytique en μ telle que

$$(4) \quad \begin{aligned}\tilde{\psi}_0(\mu) &= \tilde{\psi}_0 + O(|\mu|) \\ \tilde{r}_0(\mu) &= \mu r_1 + O(|\mu|^2) \quad \text{où} \quad r_1 e^{-2i\pi\tilde{\psi}_0} = -\frac{\lambda_1 + \frac{2i\pi}{3} q \cdot \omega_1}{\alpha_0} \neq 0\end{aligned}$$

(on choisit de prendre $\tilde{r}_0(\mu) < 0$ si $\mu < 0$).

A ce tore invariant par l'application F_μ tronquée et prise au quotient correspond un tore (resp. un ensemble de trois tores) invariant par l'application F_μ tronquée elle-même, selon que $q \notin 3\mathbb{Z}^n$ (resp. $q \in 3\mathbb{Z}^n$).

IV-3.1. 1er cas: $q \notin 3\mathbb{Z}^n$

A une renumérotation près des coordonnées dans T^n , on peut supposer que $q_1 = \pm 1$ (où $q = (q_1, \dots, q_n)$). Le changement de coordonnées

$$(\theta_1, \dots, \theta_n, \psi, r) \mapsto (\theta'_1, \dots, \theta'_n, \psi', r')$$

défini par

$$\begin{aligned} r' &= r, \\ \theta'_1 &= \psi, \\ \theta'_i &= \theta_i, \quad i = 2, \dots, n, \\ \psi' &= \frac{1}{q_1} (q \cdot \theta + 3\psi) = \theta_1 + \dots \end{aligned}$$

a le mérite de transformer le tore invariant par l'application F_μ tronquée en un tore de coordonnées (celui d'équation $\psi' = \psi'_0(\mu) = \frac{1}{q_1} \tilde{\psi}_0(\mu)$, $r' = \tilde{r}_0(\mu)$).

On fait alors (comme au chapitre III) un changement de coordonnées au voisinage de ce tore en posant (comparer à III-2.7.)

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi'_0(\mu) + \mu\sigma, \\ r' &= r_0(\mu)(1 + \mu x). \end{aligned}$$

L'application F s'écrit maintenant

$$(\theta', \sigma, x, \mu) \mapsto (\Theta', \mathfrak{S}, X, \mu)$$

avec

$$(5) \quad \begin{aligned} \Theta'(\theta', \sigma, x, \mu) &= \theta' + \gamma_0 + \mu\gamma_1 + O(|\mu|^2), \\ \begin{pmatrix} X(\theta', \sigma, x, \mu) \\ \mathfrak{S}(\theta', \sigma, x, \mu) \end{pmatrix} &= (\text{Id} + \mu M) \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix} + O(|\mu|^2), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (\gamma_0)_i &= (\omega_0)_i, \quad (\gamma_1)_i = (\omega_1)_i \quad \text{pour } i = 2, \dots, n, \\ (\gamma_0)_1 &= \Omega_0, \quad (\gamma_1)_1 = \frac{1}{2\pi} (\text{Im } \lambda_1) + \frac{1}{2\pi} (\text{Im } [\alpha_0 e^{-2i\pi\tilde{\psi}_0}]) r_1 = -\frac{1}{3} q \cdot \omega_1, \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} \text{Re}[r_1 \alpha_0 e^{-2i\pi\tilde{\psi}_0}] & 2\pi q_1 (\text{Im}[r_1 \alpha_0 e^{-2i\pi\tilde{\psi}_0}]) \\ \frac{3}{2\pi q_1} (\text{Im}[r_1 \alpha_0 e^{-2i\pi\tilde{\psi}_0}]) & -3 (\text{Re}[r_1 \alpha_0 e^{-2i\pi\tilde{\psi}_0}]) \end{pmatrix}.$$

(Remarquer $\text{Re } \lambda_1 = -\text{Re}[r_1 \alpha_0 e^{-2i\pi\tilde{\psi}_0}]$.) Puisque $\text{Re } \lambda_1 \neq 0$, on a

$$\det M = -3 |r_1 \alpha_0 e^{-2i\pi\tilde{\psi}_0}|^2 = -3 \left| \lambda_1 + \frac{2i\pi}{3} q \cdot \omega_1 \right|^2 < 0.$$

On en déduit que la matrice $\text{Id} + \mu M$ a deux valeurs propres réelles $1 + \mu \zeta_k$, $k = 1, 2$, qui vérifient $\zeta_1 \cdot \zeta_2 < 0$.

Il est commode de faire un changement de coordonnées linéaire dans le plan (x, σ) qui diagonalise $\text{Id} + \mu M$; l'application F devient

$$(\theta, x_1, x_2, \mu) \mapsto (\Theta, X_1, X_2, \mu)$$

(on a supprimé les accents sur θ) avec

$$(6) \quad \begin{aligned} \Theta(\theta, x_1, x_2, \mu) &= \theta + \gamma_0 + \mu \gamma_1 + \mu^2 \Theta_1(\theta, x_1, x_2, \mu), \\ X_1(\theta, x_1, x_2, \mu) &= (1 + \mu \zeta_1) x_1 + \mu^2 Y_1(\theta, x_1, x_2, \mu), \\ X_2(\theta, x_1, x_2, \mu) &= (1 + \mu \zeta_2) x_2 + \mu^2 Y_2(\theta, x_1, x_2, \mu) \end{aligned}$$

où Θ_1, Y_1, Y_2 sont \mathbb{Z}^n -périodiques en θ et régulières (définies par exemple pour $(x_1, x_2) \in [-1, 1]^2$ et $|\mu| \leq \delta$).

Suivant la méthode utilisée au chapitre III, nous cherchons maintenant deux fonctions \mathbb{Z}^n -périodiques $u_1(\theta), u_2(\theta)$ dont le graphe soit invariant par F , c'est-à-dire telles que

$$(7) \quad \begin{aligned} u_1[\Phi_{u_1, u_2}(\theta)] &= (1 + \mu \zeta_1) u_1(\theta) + \mu^2 Y_1[\theta, u_1(\theta), u_2(\theta), \mu], \\ u_2[\Phi_{u_1, u_2}(\theta)] &= (1 + \mu \zeta_2) u_2(\theta) + \mu^2 Y_2[\theta, u_1(\theta), u_2(\theta), \mu], \end{aligned}$$

où

$$\Phi_{u_1, u_2}(\theta) = \theta + \gamma_0 + \mu \gamma_1 + \mu^2 \Theta_1[\theta, u_1(\theta), u_2(\theta), \mu].$$

Soit U l'espace métrique complet des fonctions $u: T^n \rightarrow \mathbb{R}$ continues bornées en modules par 1, de constante de Lipschitz égale à 1, muni de la distance $d(u, u') = \sup_{\theta \in T^n} |u(\theta) - u'(\theta)|$. On montre facilement que, si u_1 et u_2 sont dans U ,

l'application Φ_{u_1, u_2} est un lipéomorphisme de T^n .

Supposons $\mu \zeta_1 > 0$ (simple question de notations). Résoudre le système (7) revient à trouver un point fixe pour l'application

$$(u_1, u_2) \mapsto (\hat{u}_1, \hat{u}_2),$$

où

$$(8) \quad \begin{aligned} \hat{u}_1(\theta) &= (1 + \mu \zeta_1)^{-1} u_1[\Phi_{u_1, u_2}(\theta)] - \mu^2 (1 + \mu \zeta_1)^{-1} Y_1[\theta, u_1(\theta), u_2(\theta), \mu], \\ \hat{u}_2(\theta) &= (1 + \mu \zeta_2) u_2[\Phi_{u_1, u_2}^{-1}(\theta)] + \mu^2 Y_2[\Phi_{u_1, u_2}^{-1}(\theta), u_1(\Phi_{u_1, u_2}^{-1}(\theta)), u_2(\Phi_{u_1, u_2}^{-1}(\theta)), \mu]. \end{aligned}$$

On montre sans peine que cette application laisse U^2 invariant et définit en fait une contraction de U^2 , d'où la conclusion comme au chapitre III.

IV-3.2. 2ème cas: $q \in 3\mathbb{Z}^n$ (on peut supposer $q=0$):

Pour traiter séparément chacun des trois tores échangés par l'application F_μ tronquée, on calcule F_μ^3 ; en coordonnées polaires c'est une application de la forme

$$(\theta, \psi, r) \mapsto (\Theta_3(\theta, \psi, r, \mu), \Psi_3(\theta, \psi, r, \mu), R_2(\theta, \psi, r, \mu))$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Theta_3(\theta, \psi, r, \mu) &= \theta + 3\omega_0 + 3\mu\omega_1 + 3\mu^2 \cdot \omega'_1 + 3r^2 \cdot \omega_2 + O(|\mu|^3 + |\mu|r^2 + r^3), \\
 \Psi_3(\theta, \psi, r, \mu) &= \psi + \frac{3}{2\pi} (\text{Im } \lambda_1) \mu + \frac{3}{2\pi} (\text{Im } [\alpha_0 e^{-6i\pi\psi}]) r \\
 (9) \quad &+ \Delta_{20} \mu^2 + \Delta_{11}(3\psi) \mu r + \Delta_{02}(3\psi) r^2 + O((|\mu| + r)^3), \\
 R_3(\theta, \psi, r, \mu) &= (1 + \mu \text{Re } \lambda_1)^3 r + \sigma_{01}(3\psi) r^2 + \sigma_{20} \mu^2 r \\
 &+ \sigma_{11}(3\psi) \mu r^2 + \sigma_{02}(3\psi) r^3 + O[r(|\mu| + r)^3]
 \end{aligned}$$

où (notations des formules (2) au début de IV-3).

$$\begin{aligned}
 \Delta_{20} &= 3\Omega_{20}, \\
 \Delta_{11}(3\psi) &= 3\Omega_{11}(3\psi) + 3 \left[(\text{Re } \lambda_1) \Omega_{01}(3\psi) - \frac{3}{2\pi} (\text{Im } \lambda_1) \rho_{01}(3\psi) \right], \\
 \Delta_{02}(3\psi) &= 3\Omega_{02}(3\psi) - 6\rho_{01}(3\psi) \Omega_{01}(3\psi), \\
 \sigma_{01}(3\psi) &= 3\rho_{01}(3\psi) + 4\rho_{01}^2(3\psi), \\
 \sigma_{20} &= 3\rho_{20}, \\
 \sigma_{11}(3\psi) &= 3\rho_{11}(3\psi) + 5(\text{Re } \lambda_1) \rho_{01}(3\psi) + \frac{9}{2\pi} (\text{Im } \lambda_1) \rho'_{01}(3\psi), \\
 \sigma_{02}(3\psi) &= 3\rho_{02}(3\psi) + 9\Omega_{01}(3\psi) \rho'_{01}(3\psi),
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Omega_{01}(3\psi) &= \frac{1}{2\pi} \text{Im}(\alpha_0 e^{-6i\pi\psi}) = \frac{1}{4\pi^2} \rho'_{01}(3\psi), \\
 \rho_{01}(3\psi) &= \text{Re}(\alpha_0 e^{-6i\pi\psi}) = -\Omega'_{01}(3\psi).
 \end{aligned}$$

L'application F_μ^3 tronquée laisse invariants les trois tores T^n évoqués au début du paragraphe, qui ont des équations de la forme

$$\begin{aligned}
 r &= r_0(\mu), & \text{où} & & r_0(\mu) &= \mu r_1 + O(|\mu|^2), \\
 \psi &= \psi_0^{(i)}(\mu), \quad i = 1, 2, 3 & & & \psi_0^{(i)}(\mu) &= \psi_0^{(i)} + O(|\mu|).
 \end{aligned}$$

Le changement de variables

$$\begin{aligned}
 r &= r_0(\mu)(1 + \mu x), \\
 \psi &= \psi_0^{(i)}(\mu) + \mu \sigma
 \end{aligned}$$

transforme F_μ^3 en une application

$$(\theta, \sigma, x) \mapsto (\Theta, \mathfrak{S}, X)$$

telle que

$$\begin{aligned}
 (10) \quad & \Theta(\theta, \sigma, x, \mu) = \theta + 3\omega_0 + 3\mu\omega_1 + O(|\mu|^2), \\
 & \begin{pmatrix} X(\theta, \sigma, x, \mu) \\ \mathfrak{S}(\theta, \sigma, x, \mu) \end{pmatrix} = (\text{Id} + \mu M) \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix} + O(|\mu|^2),
 \end{aligned}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 3 \operatorname{Re}(r_1 \alpha_0 e^{-6i\pi\psi_0^{(i)}}) & 6\pi \operatorname{Im}(r_1 \alpha_0 e^{-6i\pi\psi_0^{(i)}}) \\ \frac{9}{2\pi} \operatorname{Im}(r_1 \alpha_0 e^{-6i\pi\psi_0^{(i)}}) & -9 \operatorname{Re}(r_1 \alpha_0 e^{-6i\pi\psi_0^{(i)}}) \end{pmatrix}.$$

Tout se poursuit alors comme dans le premier cas: on obtient trois tores de dimension n invariants par F_μ^3 ; en regardant les parties linéaires on voit que ces tores sont échangés par F_μ .

IV-3.3. Il nous reste à étudier la stabilité des tores bifurqués: les deux cas se traitent identiquement; en reprenant les notations de la fin de la démonstration du premier cas, on est amené à poser

$$(11) \quad \begin{aligned} x_1 &= u_1(\theta) + x'_1, \\ x_2 &= u_2(\theta) + x'_2, \\ X_1 &= u_1(\Phi_{u_1, u_2}(\theta)) + X'_1, \\ X_2 &= u_2(\Phi_{u_1, u_2}(\theta)) + X'_2, \end{aligned}$$

où $u_1(\theta), u_2(\theta)$ sont solutions de (7). L'application (6) devient

$$(12) \quad \begin{aligned} \Theta(\theta, x'_1, x'_2, \mu) &= \theta + \gamma_0 + \mu \gamma_1 + O(|\mu|^2), \\ X'_1(\theta, x'_1, x'_2, \mu) &= (1 + \mu \zeta_1)x'_1 + O[|\mu|^2(|x'_1| + |x'_2|)], \\ X'_2(\theta, x'_1, x'_2, \mu) &= (1 + \mu \zeta_2)x'_2 + O[|\mu|^2(|x'_1| + |x'_2|)]. \end{aligned}$$

On conclut à l'instabilité par II-1.19 puisque $\zeta_1 \zeta_2 < 0$.

Enonçons ces résultats sous forme de théorème:

IV-3.4. Théorème. *On suppose que $3\Omega_0 + q \cdot \omega_0 \in \mathbb{Z}$, que F_μ est assez régulière, et que les hypothèses du début de IV-3. sont vérifiées. Si $\alpha_0 \neq 0$ (voir (1)) il existe pour $\mu \neq 0$ proche de 0 un revêtement à trois feuillettes de $T^n \times 0$ invariant par \bar{F}_μ , trivial si $q \in 3\mathbb{Z}^n$, difféomorphe à T^n si $q \notin 3\mathbb{Z}^n$, instable pour tout μ dans les deux cas. A ceci correspond dans les deux cas un tore de dimension $n+1$ invariant par l'équation différentielle (E_μ) , $\mu \neq 0$ proche de 0, revêtant trois fois le tore invariant T_μ^{n+1} initial, et instable pour tout $\mu \neq 0$.*

Démonstration. Seule la partie relative à l'équation (E_μ) n'a pas été démontrée:

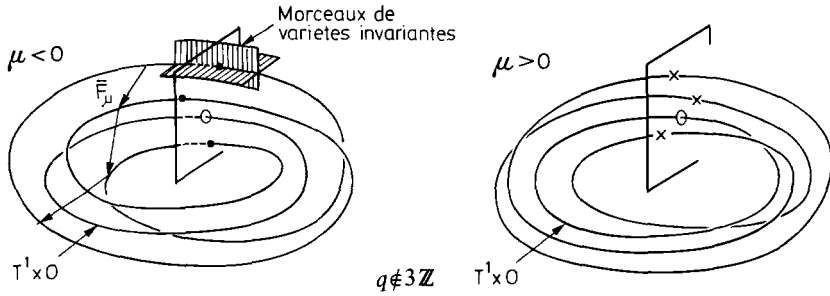
si $q \notin 3\mathbb{Z}^n$, la variété invariante qu'on obtient pour (E_μ) s'écrit comme le quotient de $T^n \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence

$$(\tau, 1) = (f(\tau), 0)$$

où f est la restriction de \bar{F}_μ au tore qu'elle laisse invariant. En utilisant le difféomorphisme

$$\theta \mapsto (\theta, u_1(\theta), u_2(\theta))$$

de $T^n \times 0$ sur ce tore, ainsi que les formules (5), on montre que f est isotope à l'identité, ce qui permet de conclure.



Coupes superposées avec traces des variétés invariantes et indication de leur stabilité (valable pour tout q si $\text{Re } \lambda_1 > 0$):

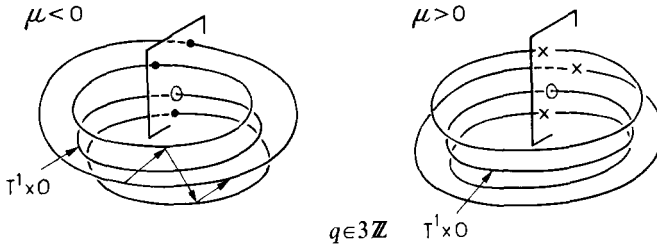
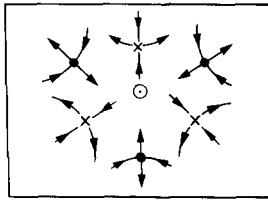


Fig. 4

si $q \in 3\mathbb{Z}^n$, la variété invariante qu'on obtient pour (E_μ) s'écrit comme le quotient de $(T_1^n \cup T_2^n \cup T_3^n) \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence

$$(\tau, 1) = (f(\tau), 0)$$

où

$$f: T_1 \rightarrow T_2, T_2 \rightarrow T_3, T_3 \rightarrow T_1$$

est, sur chaque T_i , isotope à l'identité, d'où la conclusion.

La figure 4 décrit les cercles invariants de \bar{F}_μ lorsque $n = 1$.

IV-4. Cas $r = 4$

On suppose que les hypothèses (H'_1) et (H'_2) du paragraphe III-2 sont vérifiées, ce qui permet d'appliquer le lemme III-2.2. relatif au changement de stabilité du tore invariant.

On suppose enfin qu'il existe $q=(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $4\Omega_0 + q \cdot \omega_0 \in \mathbb{Z}$; le lemme III-3.1. nous permet de supposer que les q_i sont des 0, des 1, des -1 , ou des 2.

Remarquons que la partie relative au cas $r=3$ de l'hypothèse (H_2'') de III-2.5. est alors automatiquement vérifiée.

Les changements de variables du III.2.5. nous ramènent à l'étude de

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$$

définie au voisinage de $\mathbb{R}^n \times 0 \times 0$ par

$$\begin{aligned} F(\theta, z, \mu) &= (f(\theta, z, \mu), \Phi(\theta, z, \mu)), \\ f(\theta, z, \mu) &= \theta + \omega_0 + \mu \omega_1 + |z|^2 \omega_2 + O(|\mu|^2 + |\mu| |z|^2 + |z|^4), \\ (1) \quad \Phi(\theta, z, \mu) &= \lambda_0 [(1 + \mu \lambda_1) z + \alpha_0 z^2 \bar{z} + \alpha_1 e^{-2i\pi q \cdot \theta} \bar{z}^3] \\ &\quad + O(|\mu|^2 |z| + |\mu| |z|^3 + |z|^5), \end{aligned}$$

pourvu que F soit suffisamment dérivable.

En coordonnées polaires (notations du III-2.7.) on obtient

$$\begin{aligned} \Theta(\theta, \psi, r, \mu) &= \theta + \omega_0 + \mu \omega_1 + r^2 \omega_2 + O(|\mu|^2 + |\mu| r^2 + r^4), \\ \Psi(\theta, \psi, r, \mu) &= \psi + \Omega_0 + \frac{1}{2\pi} (\text{Im } \lambda_1) \mu + \frac{1}{2\pi} (\text{Im } \alpha_0) r^2 \\ (2) \quad &\quad + \frac{1}{2\pi} (\text{Im} [\alpha_1 e^{-2i\pi(q \cdot \theta + 4\psi)}]) r^2 + O(|\mu|^2 + |\mu| r^2 + r^4), \\ R(\theta, \psi, r, \mu) &= (1 + \mu \text{Re } \lambda_1) r + (\text{Re } \alpha_0 + \text{Re} [\alpha_1 e^{-2i\pi(q \cdot \theta + 4\psi)}]) r^3 \\ &\quad + O(|\mu|^2 r + |\mu| r^3 + r^5). \end{aligned}$$

Comme en IV-3, l'application F «tronquée» obtenue à partir des formules (2) en oubliant les restes $O(\dots)$ passe au quotient par le revêtement à quatre feuillettes de $T^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ sur $T^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, ramifié le long de $T^n \times 0 \times \mathbb{R}$, défini par

$$(\theta, \psi, r, \mu) \mapsto (\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu)$$

avec

$$\tilde{\theta} = \theta, \quad \tilde{\psi} = q \cdot \theta + 4\psi, \quad \tilde{r} = r.$$

L'application $(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) \mapsto (\tilde{\Theta}, \tilde{\Psi}, \tilde{R}, \mu)$ obtenue au quotient s'écrit

$$\begin{aligned} (3) \quad \tilde{\Theta}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) &= \tilde{\theta} + \omega_0 + \mu \omega_1 + \tilde{r}^2 \omega_2, \\ \tilde{\Psi}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) &= \tilde{\psi} + \tilde{\omega}_1 \mu + \tilde{\Omega}(\tilde{\psi}) \tilde{r}^2, \\ \tilde{R}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) &= (1 + \mu \text{Re } \lambda_1) \tilde{r} + (\text{Re } \alpha_0 + \text{Re} [\alpha_1 e^{-2i\pi \tilde{\psi}}]) \tilde{r}^3, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= q \cdot \omega_1 + \frac{2}{\pi} \text{Im } \lambda_1, \\ \tilde{\Omega}(\tilde{\psi}) &= q \cdot \omega_2 + \frac{2}{\pi} \text{Im } \alpha_0 + \frac{2}{\pi} \text{Im} [\alpha_1 e^{-2i\pi \tilde{\psi}}]. \end{aligned}$$

Comme en IV-3, on cherche pour chaque $\mu \neq 0$ un tore T^n invariant par l'application obtenue en fixant μ , sous forme d'une solution $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0(\mu)$, $\tilde{r} = \tilde{r}_0(\mu)$ du système d'équations

$$(3') \quad \begin{aligned} \tilde{\Psi}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) &= \tilde{\psi}, \\ \tilde{R}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{r}, \mu) &= \tilde{r}. \end{aligned}$$

Ce système s'écrit encore

$$(3'') \quad \left(\lambda_1 + i \frac{\pi}{2} q \cdot \omega_1 \right) \mu + \left(\alpha_0 + \alpha_1 e^{-2i\pi\tilde{\psi}} + i \frac{\pi}{2} q \cdot \omega_2 \right) \tilde{r}^2 = 0.$$

Une condition nécessaire d'existence d'une solution est manifestement que

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1 + i \frac{\pi}{2} q \cdot \omega_1} e^{-2i\pi\tilde{\psi}} + \frac{\alpha_0 + \frac{i\pi}{2} q \cdot \omega_2}{\lambda_1 + i \frac{\pi}{2} q \cdot \omega_1} \text{ soit réel,}$$

et donc en particulier que

$$(4) \quad \left| \frac{\alpha_1}{\lambda_1 + \frac{i\pi}{2} q \cdot \omega_1} \right| \geq \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\alpha_0 + \frac{i\pi}{2} q \cdot \omega_2}{\lambda_0 + \frac{i\pi}{2} q \cdot \omega_1} \right) \right|.$$

Si l'inégalité (4) est stricte, on a deux solutions du système, sous la forme implicite

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \tilde{\psi}_0(\mu), \\ \mu &= \mu_i \tilde{r}^2, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Si de plus

$$(5) \quad \left| \alpha_0 + \frac{i\pi}{2} q \cdot \omega_2 \right| < |\alpha_1|,$$

on a

$$\mu_1 \mu_2 < 0.$$

Si au contraire

$$(6) \quad \left| \alpha_0 + \frac{i\pi}{2} q \cdot \omega_2 \right| > |\alpha_1|,$$

on a

$$\mu_1 \mu_2 > 0.$$

En résumé, si (4) est stricte et si (5) est vérifiée, il existe pour tout $\mu \neq 0$ un tore T^n invariant par l'application \bar{F}_μ tronquée et passée au quotient par le revêtement à quatre feuillettes. Si (4) est stricte et si (6) est vérifiée, il existe pour $\mu < 0$ ou pour $\mu > 0$ (suivant le signe de μ_1 et μ_2) deux tores T^n invariants par l'application \bar{F}_μ tronquée et passée au quotient par le revêtement à quatre feuillettes (voir figure 5).

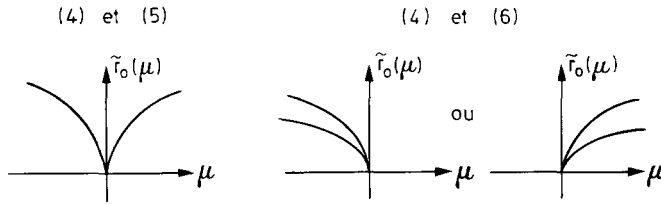


Fig. 5

Enfin, si (4) n'est pas vérifiée, il n'y a pas de tore T^n autre que $T^n \times 0$ invariant par \bar{F}_μ tronquée et passée au quotient par le revêtement à quatre feuilletts. Nous ne traiterons pas ce dernier cas où des tores invariants T^{n+1} peuvent apparaître*.

Le reste de l'étude (lorsque (4) stricte est vérifiée) se poursuit comme dans IV-3 en distinguant les trois cas suivants:

IV-4.1. $q \in 4\mathbb{Z}^n$: L'application \bar{F}_μ tronquée laisse invariant un ensemble de 4 tores de dimension n pour $\mu \neq 0$ (resp. deux ensembles de 4 tores de dimension n pour $\mu < 0$ ou pour $\mu > 0$). On raisonne alors sur F_μ^4 .

IV-4.2. $q \in 2\mathbb{Z}^n \setminus 4\mathbb{Z}^n$, $4\Omega_0 + q \cdot \omega_0 \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$: L'application \bar{F}_μ tronquée laisse invariant un ensemble de 2 tores de dimension n revêtant deux fois $T^n \times 0$ pour $\mu \neq 0$ (resp. deux ensembles de 2 tores de dimension n revêtant deux fois $T^n \times 0$ pour $\mu < 0$ ou pour $\mu > 0$). On raisonne alors sur F_μ^2 .

IV-4.3. $q \notin 2\mathbb{Z}^n$: L'application \bar{F}_μ tronquée laisse invariant un tore de dimension n revêtant quatre fois $T^n \times 0$ pour $\mu \neq 0$ (resp. deux tores de dimension n revêtant quatre fois $T^n \times 0$ pour $\mu < 0$ ou pour $\mu > 0$). On raisonne alors sur F_μ .

Dans tous ces cas l'étude de la stabilité des tores bifurqués se fait comme au IV-3.3. Les calculs de la matrice M et des valeurs propres ζ_1, ζ_2 sont ici analogues à ceux du cas résonnant $\lambda_0^4 = 1$ de [13] (§ VI).

On peut énoncer le théorème suivant, incomplet en ce qu'il laisse de côté le cas où (4) n'est pas vérifiée:

IV-4.4. Théorème. *On suppose que $4\Omega_0 + q \cdot \omega_0 \in \mathbb{Z}$, que F_μ est assez régulière, et que les hypothèses du début de IV-4. sont vérifiées.*

Si l'inégalité (4) n'est pas vérifiée, \bar{F}_μ ne laisse pas invariant d'autre tore T^n que $T^n \times 0$ pour μ voisin de 0.

On suppose maintenant que l'inégalité (4) est vérifiée strictement:

Si (5) est vérifiée, il existe pour $\mu \neq 0$ proche de 0 un revêtement à quatre feuilletts de $T^n \times 0$ invariant par F_μ , trivial si $q \in 4\mathbb{Z}^n$, ayant deux composantes connexes si $q \in 2\mathbb{Z}^n \setminus 4\mathbb{Z}^n$, difféomorphe à T^n si $q \notin 2\mathbb{Z}^n$, instable pour tout μ dans les trois cas:

Si (6) est vérifiée, il existe ou pour $\mu < 0$ ou pour $\mu > 0$ proche de 0 deux

* Des résultats partiels dans ce sens ont été obtenus par V. ARNOLD, F. LEMAIRE & Y. WAN.

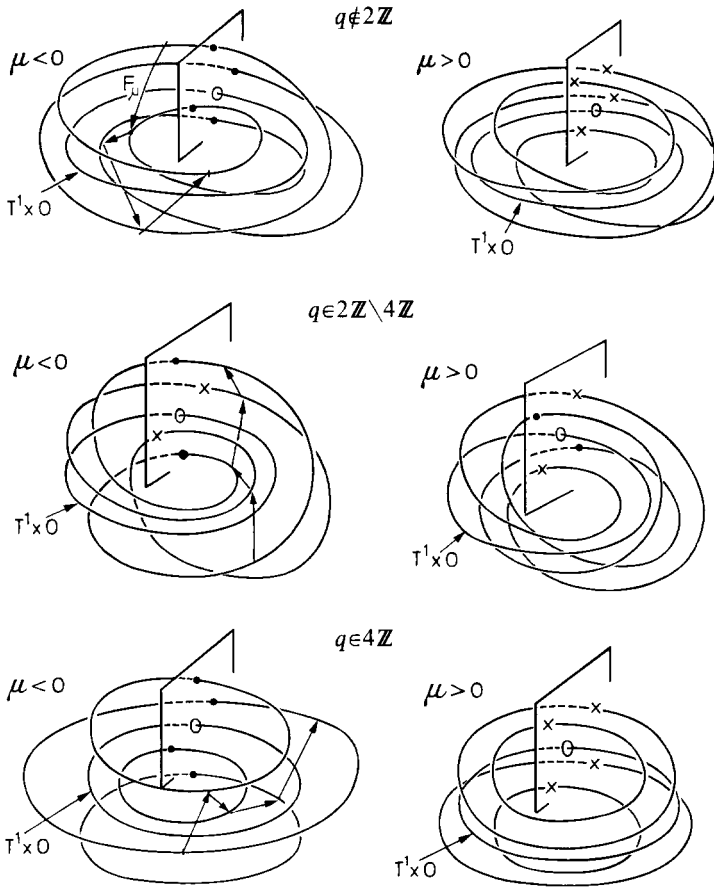


Fig. 6

revêtements invariants comme décrits ci-dessus; l'un au moins de ces revêtements est instable, la stabilité de l'autre dépend du cas particulier.

A ceci correspond: dans le cas (5), un tore de dimension $n+1$ invariant par l'équation différentielle (E_μ) , $\mu \neq 0$ proche de 0, revêtant quatre fois le tore invariant T_μ^{n+1} initial, et instable pour tout $\mu \neq 0$; dans le cas (6), deux tores de dimension $n+1$ invariants par (E_μ) , revêtant chacun quatre fois T_μ^{n+1} , n'existant que pour $\mu < 0$ ou pour $\mu > 0$ proche de 0, et dont l'un au moins est instable.

IV-4.5. Remarque. Le lecteur aura pu constater

- 1) que les calculs de ce chapitre ressemblent à ceux de [13],
- 2) que ce n'est pas le masochisme qui nous a poussé à utiliser des formes normales plus longues qu'au III.

La figure 6 illustre le cas où la bifurcation se fait des deux côtés (cas $n=1$) (pour l'autre cas, superposer les figures correspondant à $\mu < 0$ et $\mu > 0$).

Chapitre V. Commentaires et Contre-Exemples

V-1. Etude des hypothèses

Pour obtenir les théorèmes de bifurcation des chapitres III et IV nous avons fait (en dehors des hypothèses initiales sur l'existence pour $\mu=0$ d'un tore T^n invariant et d'une application de premier retour) des hypothèses de plusieurs types sur la famille \bar{F}_μ :

- (i) *Hypothèses géométriques*:
 - i1. Persistance d'un tore invariant T_μ de dimension n pour \bar{F}_μ lorsque μ est proche de 0.
 - i2. Hypothèse tangentielle sur \bar{F}_0 : existence d'une conjugaison C^l de $\bar{g} = \bar{f}_0$ à \bar{R}_{ω_0} ergodique.
 - i3. Hypothèse normale sur \bar{F}_0 : le spectrographe $S_l(\bar{F}_0)$ contient une valeur propre «simple» $\lambda_0 = e^{2i\pi\Omega_0}$.
- (ii) *Hypothèses de transversalité et d'attractivité vague en $\mu=0$* : Non annulation de $\operatorname{Re} \lambda_1$ et $\operatorname{Re} \alpha$ dans les notations de III-2.6.
- (iii) *Hypothèses diophantiennes sur \bar{F}_0* : Caractère «suffisamment irrationnel» du $(n+1)$ -uple (ω_0, Ω_0) . Nous allons rapidement examiner ces hypothèses.

i.1. Dans le cas classique de la bifurcation de Hopf des difféomorphismes la persistance du point fixe de $F_\mu: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ pour μ voisin de 0 est assurée par le théorème des fonctions implicites dès que le spectre de $dF_\mu(0)$ ne contient pas 1.

Ici un tel recours ne fonctionne pas mais on montre dans [5 bis] que, dans les conditions des théorèmes de bifurcation des chapitres III, IV, V, il y a effectivement persistance d'un tore invariant T_μ par \bar{F}_μ .

i.2. Si $n=1$, il découle de [9] que sur tout chemin C^1 de difféomorphismes C^k de T^1 ($k \geq 3$) sur lequel le nombre de rotation varie, l'hypothèse tangentielle est vérifiée avec $l \leq k-2$ pour un ensemble de valeurs du paramètre ayant une mesure de Lebesgue positive.

i.3. Pour évaluer l'hypothèse normale commençons par étudier l'effet d'un changement de variables «normalement linéaire» qui, bien entendu, ne change pas le spectre de \mathcal{A} : au couple (H, \bar{h}) , $H \in \mathcal{C}^l(T^n; GL(E))$ (resp. $\mathcal{C}^l(T^n; GL(E_{\mathbb{C}}))$), $\bar{h} \in \operatorname{Diff}_0^l(T^n)$, on associe l'opérateur

$$\mathcal{H} \in GL(\mathcal{C}^l(T^n; E)) \quad (\text{resp. } GL(\mathcal{C}^l(T^n; E_{\mathbb{C}})))$$

défini comme \mathcal{A} par

$$(\mathcal{H} X)(\theta) = H(h^{-1}(\theta)) X(h^{-1}(\theta)).$$

On obtient

$$(\mathcal{H}^{-1} X)(\theta) = H^{-1}(\theta) X(h(\theta)),$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{H} \mathcal{A} \mathcal{H}^{-1} X)(\theta) &= H(h^{-1}(\theta)) A(g^{-1} \circ h^{-1}(\theta)) \\ &\quad \cdot H^{-1}(g^{-1} \circ h^{-1}(\theta)) X(h \circ g^{-1} \circ h^{-1}(\theta)) \\ &= B(h \circ g^{-1} \circ h^{-1}(\theta)) X(h \circ g^{-1} \circ h^{-1}(\theta)), \end{aligned}$$

avec

$$B(\theta) = C(h^{-1}(\theta)),$$

$$C(\theta) = H(g(\theta))A(\theta)H^{-1}(\theta).$$

On a donc remplacé \bar{g} par $\bar{h} \circ \bar{g} \circ \bar{h}^{-1}$ et $A(\theta)$ par $C(h^{-1}(\theta))$.

On dira que l'application

$$\theta \mapsto H(g(\theta))A(\theta)H^{-1}(\theta)$$

est g -cohomologue sur \mathbb{R} (resp. sur \mathbb{C}) à l'application $\theta \mapsto A(\theta)$ (sous-entendu par une cohomologie de classe C^1 définie par $\theta \mapsto H(\theta)$).

L'hypothèse normale exige l'existence d'un sous-fibré de rang 1 ou 2 invariant par \bar{G}_0 sur lequel l'application $\theta \mapsto A(\theta)$ correspondant à \bar{G}_0 soit g -cohomologue à une constante (après un éventuel revêtement rendant trivial le fibré).

En dimension un, le passage aux logarithmes ramène le problème de la g -cohomologie (lorsque $A(\theta)$ est inversible) à la résolution d'une équation aux différences (voir (iii)).

Il résulte des travaux de HEDLUND que si l'équation aux différences

$$\psi(\theta + \omega) - \psi(\theta) = \varphi(\theta) \quad \left(\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0 \right)$$

n'a pas de solution continue ψ , le difféomorphisme \bar{F} de $T^1 \times \mathbb{R}$ défini par

$$\bar{F}(\theta, x) = (\theta + \omega, e^{\varphi(\theta)} \cdot x)$$

a une orbite dont l'adhérence est $T^1 \times \mathbb{R}_+$ (voir [7] et [15]).

L'hypothèse de g -cohomologie à une constante est donc bien une hypothèse géométrique très forte (existence de cycles invariants autres que $T^1 \times 0$).

En dimension deux, on retrouve tous les problèmes de la dimension un (déterminant) compliqués par la non-commutativité. De plus, l'application $\theta \mapsto A(\theta)$ peut être homotopiquement non triviale.

Dans le paragraphe suivant on examine la possibilité de remplacer l'hypothèse d'existence d'une valeur propre par la seule hypothèse d'existence pour \bar{G}_0 d'une famille de tores de dimension $n+1$ invariants.

Les hypothèses de transversalité et d'attractivité vague pour $\mu=0$ (ii) sont analogues à celles qui sont faites dans la théorie classique de la bifurcation de Hopf des difféomorphismes (voir cependant III-2.12.(ii) et IV pour l'étude de cas où $\text{Re } \alpha = 0$).

Les hypothèses diophantiennes (iii) servent à contrôler la perte de différentiabilité dans la résolution d'équations aux différences du type

$$(*) \quad \lambda'_0 \psi(\theta + \omega_0) - \psi(\theta) = \varphi(\theta).$$

La démonstration de ce que l'hypothèse (H'_2) entraîne une perte $n + \varepsilon'$ pour tout $\varepsilon' > \varepsilon$ n'est pas évidente (calquer [8] chapitre VII). Nous nous contenterons ici de montrer le lemme ci-dessous qui entraîne immédiatement que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $(n+1)$ -uples $(\omega_0, \Omega_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pour lesquels la perte est strictement

plus que $n + \varepsilon$ dans l'équation (*) est de mesure de Lebesgue nulle (prendre $\omega = \omega_0, \Omega = r\Omega_0$). Ce lemme, qui semble classique, nous a été communiqué par M. HERMAN.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nous noterons $\|\alpha\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\alpha - p|$ la distance de α à l'entier le plus proche. Rappelons d'autre part que, si $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$, on a noté $|q| = \max_i |q_i|$.

V-1.1. Lemme. *Etant donnés $\varepsilon > 0, \Omega \in \mathbb{R}$, pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}^n$ (au sens de la mesure de Lebesgue) on a*

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}^n - 0} \frac{1}{|q|^{n+\varepsilon} \|\Omega + q \cdot \omega\|} < +\infty.$$

V-1.2. *Remarque.* On déduit de ce lemme que l'ensemble des $(\omega_0, \Omega_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ qui ne vérifient pas (H'_2) est de mesure nulle.

Démonstration de V-1.1. Soit $0 < \delta < 1$ un réel. Remarquons qu'il suffit de montrer la convergence de la série

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}^n - 0} \frac{1}{|q|^{(n+\varepsilon)\delta} \|\Omega + q \cdot \omega\|^\delta}$$

pour presque tout ω dans \mathbb{R}^n (ou, ce qui revient au même, dans T^n). C'est ce que nous allons faire en choisissant $\delta < 1$ assez grand pour que $(n + \varepsilon)\delta = n + \eta > n$. Remarquons en effet que

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}^n - 0} \frac{1}{|q|^{n+\eta}} = S < +\infty$$

cela vient de ce que

$$\sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^n - 0 \\ |q| \leq N}} \frac{1}{|q|^{n+\eta}} = \sum_{p=1}^N (2p+1)^{n-1} \frac{1}{p^{n+\eta}} < +\infty.$$

D'autre part, il existe une constante $I < +\infty$ telle que, si $\delta < 1$, on ait

$$\forall q \in \mathbb{Z}^n - 0, \quad \int_{T^n} \frac{dx}{\|\Omega + q \cdot x\|^\delta} \leq I.$$

En effet, si tous les q_i sont dans $\mathbb{Z} - 0$, l'application de T^n dans T^n définie par

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (q_1 x_1, \dots, q_n x_n)$$

conserve la mesure de Lebesgue (= de Haar). On en déduit (après une éventuelle permutation des x_i) qu'il existe $m \leq n$ tel que

$$\int_{T^n} \frac{dx}{\|\Omega + q \cdot x\|^\delta} = \int_{T^n} \frac{dx}{\left\| \Omega + \sum_{i=1}^m x_i \right\|^\delta} = I_m < +\infty$$

d'où la conclusion.

En définitive

$$\int_{T^n} \left[\sum_{q \in \mathbb{Z}^n - 0} \frac{1}{|q|^{(n+\varepsilon)\delta} \|\Omega + q \cdot x\|^\delta} \right] dx \leq SI < +\infty$$

donc, pour presque tout x dans T^n (et donc aussi dans \mathbb{R}^n) la série sous l'intégrale converge, ce qui démontre le Lemme V-1.1.

V-2. Sur le changement de stabilité d'un tore invariant

Nous considérons dans ce paragraphe une famille à un paramètre d'applications de classe C^k , difféomorphismes au voisinage de $T^n \times 0$,

$$\bar{F}_\mu : T^n \times \mathcal{V}, T^n \times 0 \rightarrow T^n \times \mathbb{R}^2, T^n \times 0$$

(\mathcal{V} voisinage de 0 dans \mathbb{R}^2) représentée par une application de classe $C^k, k \geq 2$,

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},$$

$$F(\theta, x, \mu) = (f(\theta, x, \mu), \Phi(\theta, x, \mu), \mu).$$

On reprend les notations du chapitre III, c'est-à-dire

$$f(\theta, 0, \mu) = f_\mu(\theta), \quad f_0(\theta) = g(\theta) \in D^k(T^n),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\theta, 0, \mu) = A_\mu(\theta) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Supposons que pour $\mu < 0$ (resp. $\mu > 0$) le spectrographe $S_0(\bar{F}_\mu)$ soit à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du disque unité. D'après le Lemme II-1.5. (appliqué à \bar{F}_μ ou à \bar{F}_μ^{-1}) le tore invariant $T^n \times 0$ est stable pour $\mu < 0$, instable pour $\mu > 0$.

Comparons un instant cette situation avec celle de la bifurcation de Hopf des difféomorphismes de \mathbb{R}^2 (voir [18]); dans ce dernier cas, la situation linéaire est très simple; la famille à un paramètre $A_\mu = dF_\mu(0)$ d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est décrite par la figure 7.

Pour $\mu = 0$ le plan est rempli par une famille à un paramètre d'ellipses invariantes (qu'on peut supposer être des cercles après changement linéaire de coordonnées). De façon imagée, l'introduction des termes non linéaires courbe «en général» ce plan d'orbites invariantes en un paraboloides dont la section par $\mu = \mu_0$ est un cycle invariant par \bar{F}_{μ_0} ($\mu_0 > 0$ ou $\mu_0 < 0$ suivant les cas), comme indiqué à la fig. 8.

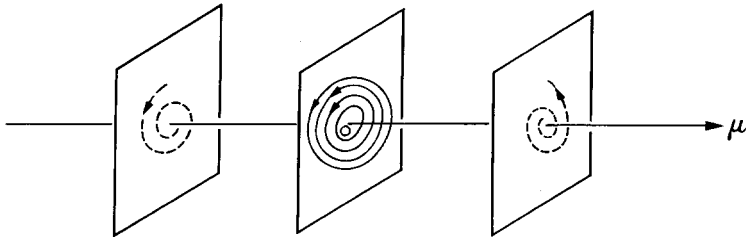


Fig. 7

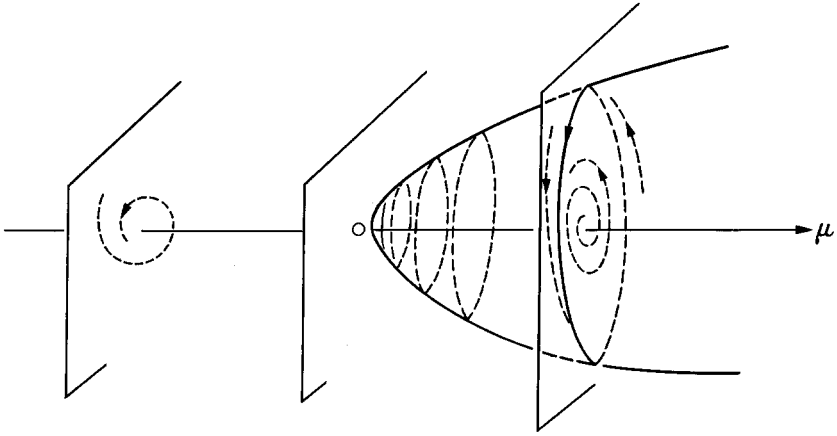


Fig. 8

Ce paraboloid est d'autant plus loin du plan que le premier terme non linéaire significatif est grand.

Dans notre cas, même pour $n=1$, la situation linéaire est beaucoup plus complexe (voir V-1.): par exemple, le difféomorphisme

$$\begin{aligned} \bar{G}_0: T^n \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow T^n \times \mathbb{R}^2, \\ \bar{G}_0(\theta, x) &= (\bar{g}(\theta), A_0(\theta)x) \end{aligned}$$

peut avoir une orbite dense lorsque son spectrographe $S_0(\bar{G}_0)$ est contenu dans le cercle unité. Ceci explique qu'il ne soit pas facile en général de traduire sur une hypothèse infinitésimale en $\mu=0$ la variation du spectrographe $S_0(\bar{F}_\mu)$.

Dans ce paragraphe, nous généralisons l'étude qui mène au Lemme III-2.2. Nous n'étudions cependant que le cas qui ressemble le plus à la situation classique: nous supposons, après un éventuel changement de variables sur F , que \bar{G}_0 laisse invariants les tores standards de dimension $n+1$ d'équation $|z| = \text{cste}$ dans $T^n \times \mathbb{C} = T^n \times \mathbb{R}^2$, autrement dit nous faisons l'hypothèse*.

C1: Pour tout $\theta \in T^n$, $A_0(\theta)$ est une rotation.

Nous identifierons dorénavant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} et écrirons (comme au chapitre III)

$$F(\theta, z, \mu) = (f(\theta, z, \mu), \Phi(\theta, z, \mu), \mu),$$

avec

$$\begin{aligned} f(\theta, z, \mu) &= g(\theta) + O(|\mu| + |z|), \\ \Phi(\theta, z, \mu) &= \lambda_0(\theta)z + O(|\mu||z| + |z|^2) \end{aligned}$$

où $\lambda_0(\theta) = e^{2i\pi\Omega_0(\theta)}$, $\Omega_0(\theta) = q \cdot \theta + \hat{\Omega}_0(\theta)$, $\hat{\Omega}_0(\theta)$ \mathbb{Z}^n -périodique.

Remarquons que sur l'un quelconque des tores $T^{n+1} = T^n \times T^1$ invariants par \bar{G}_0 , la restriction de \bar{G}_0 s'identifie au difféomorphisme «skew-produit» \bar{F}_0 de

* En particulier vérifiée après changement de variables si l'hypothèse (H2) de III-1 est vérifiée.

T^{n+1} représenté par le difféomorphisme

$$\begin{aligned} \Gamma_0: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ \Gamma_0(\theta, \psi) &= (g(\theta), \psi + \Omega_0(\theta)). \end{aligned}$$

La proposition qui suit généralise le Lemme III-2.2.

V-2.1. Proposition. *On suppose que C_1 est vérifiée, que $\bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_{\omega_0} \circ \bar{h}$ avec $\bar{h} \in \text{Diff}_0^1(T^n)$ et \bar{R}_{ω_0} ergodique, et que $\bar{\Gamma}_0$ est uniquement ergodique*. On suppose enfin que $k \geq 3$ et que*

$$\frac{d}{d\mu} \left[\int_{T^n} \text{Log} |\det A_\mu(\theta)| d\nu \right]_{\mu=0} \neq 0$$

où ν est l'unique mesure de probabilité sur T^n invariante par \bar{g} . Alors la stabilité du tore invariant $T^n \times 0$ de \bar{F}_μ ne dépend que du signe de cette dernière quantité: Si

$$\frac{d}{d\mu} \left[\int_{T^n} \text{Log} |\det A_\mu(\theta)| d\nu \right]_{\mu=0} > 0,$$

le tore invariant $T^n \times 0$ est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$.

Démonstration. Elle est basée sur le Lemme suivant, qui est l'analogie de III-2.4.

V-2.2. Lemme. *Sous les hypothèses de la Proposition V-2.1. il existe une famille de changements de variables de classe C^1 (linéaire en z, \bar{z})*

$$\begin{aligned} H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \\ H(\theta, z, \mu) &= (\theta, z', \mu) \end{aligned}$$

locale au voisinage de $\mathbb{R}^n \times 0$, transformant F_μ en une application pour laquelle

$$\Phi(\theta, z, \mu) = \lambda_0(\theta)(1 + \mu \lambda_1)z + o(|\mu|)z + o(|\mu|)\bar{z} + O(|z|^2)$$

avec $\text{Re } \lambda_1 \neq 0$.

Démonstration du Lemme V-2.2. On part, comme pour III-2.4., de

$$\Phi(\theta, z, \mu) = \lambda_0(\theta)[z + \mu(\lambda_1(\theta)z + \lambda_2(\theta)\bar{z})] + O(|\mu|^2)z + O(|\mu|^2)\bar{z} + O(|z|^2)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^{k-2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ \mathbb{Z}^n -périodiques.

Un changement de variables du type III-2.4. nous conduit à remplacer respectivement λ_1 et λ_2 par

$$\begin{aligned} \lambda'_1(\theta) &= \lambda_1(\theta) - \alpha_1(\theta) + \alpha_1(g(\theta)), \\ \lambda'_2(\theta) &= \lambda_2(\theta) - \alpha_2(\theta) + \overline{\lambda_0(\theta)^2} \alpha_2(g(\theta)). \end{aligned}$$

* Rappelons que ceci signifie qu'il existe une unique mesure de probabilité sur T^{n+1} invariante par $\bar{\Gamma}_0$, ou encore que les sommes de Birkhoff $\frac{1}{P} \sum_{i=0}^{P-1} \varphi \circ \Gamma_0^i$ convergent uniformément vers une constante pour toute fonction continue φ sur T^{n+1} (voir [8]).

Sans hypothèse supplémentaire les équations

$$\begin{aligned} \lambda'_1(\theta) &= \int_{T^n} \lambda_1(\theta) dv = \lambda_1, \\ \lambda'_2(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

n'ont pas forcément des solutions continues α_1 , et α_2 .

Pour chercher des solutions approchées on commence par résoudre

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1(\theta) - (1 + \eta) \alpha_1(\theta, \eta) + \alpha_1(g(\theta), \eta) &= 0, \\ \lambda_2(\theta) - (1 + \eta) \alpha_2(\theta, \eta) + \overline{\lambda_0(\theta)^2} \alpha_2(g(\theta), \eta) &= 0 \end{aligned}$$

où $\tilde{\lambda}_1(\theta) = \lambda_1(\theta) - \lambda_1$ est d'intégrale nulle pour la mesure ν .

La solution est donnée par les séries normalement convergentes pour $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \alpha_1(\theta, \eta) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \eta)^{i+1}} \tilde{\lambda}_1(g^i(\theta)), \\ \alpha_2(\theta, \eta) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \eta)^{i+1}} \lambda_2(g^i(\theta)) \overline{\lambda_0(\theta)^2} \dots \overline{\lambda_0(g^{i-1}(\theta))^2} \end{aligned}$$

(avec la convention que, pour $i=0$, le premier terme de α_2 est égal à $\frac{1}{1 + \eta} \lambda_2(\theta)$).
Posons $\varphi(\theta, \psi) = \lambda_2(\theta) e^{-4i\pi\psi}$, on vérifie que, pour $i \geq 1$, on a

$$(\varphi \circ \Gamma_0^i)(\theta, \psi) = \lambda_2(g^i(\theta)) \overline{\lambda_0(\theta)^2} \dots \overline{\lambda_0(g^{i-1}(\theta))^2} e^{-4i\pi\psi}$$

et donc que

$$\alpha_2(\theta, \eta) = \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \eta)^{i+1}} (\varphi \circ \Gamma_0^i)(\theta, \psi) \right] \cdot e^{4i\pi\psi}.$$

Remarquons que sous les hypothèses de la proposition V-2.1. les quantités

$$\sup_{\theta \in T^n} \|Dg^i(\theta)\| \quad \text{et} \quad \sup_{(\theta, \Psi) \in T^{n+1}} \|D\Gamma_0^i(\theta, \Psi)\|$$

ont une croissance sous-exponentielle lorsque $i \rightarrow +\infty$; en fait la première est uniformément bornée et la deuxième a une croissance au plus linéaire en i puisque

$$D\Gamma_0^i(\theta, \Psi) = \begin{pmatrix} Dg^i(\theta) & 0 \\ \sum_{k=0}^{i-1} D\Omega_0(g^k(\theta)) Dg^k(\theta) & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

On en déduit, en dérivant terme à terme les séries définissant α_1 et α_2 que ces fonctions sont de classe C^1 (puisque $\tilde{\lambda}_1$ et λ_2 le sont). Remarquons que pour avoir ce résultat il aurait suffi que le 0-spectrographe $S_0(\tau(\bar{\Gamma}_0))$ soit contenu dans le cercle unité.

V-2.3. Lemme.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \sup_{\theta \in T^n} |\alpha_i(\theta, \eta)| = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^2 \sup_{\theta \in T^n} \|D_\theta \alpha_i(\theta, \eta)\| = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Montrons comment ce Lemme permet de conclure: On considère le changement de variables H défini par

$$H(\theta, z, \mu) = (\theta', z', \mu)$$

où

$$z' = z + \mu(\alpha_1(\theta, \sqrt{|\mu|})z + \alpha_2(\theta, \sqrt{|\mu|})\bar{z}), \quad \theta' = \theta.$$

D'après le Lemme V-2.3., $|\mu| \sup_{\theta \in T^n} |\alpha_i(\theta, \sqrt{|\mu|})|$ est, pour $i = 1, 2$, un $o(\sqrt{|\mu|})$. L'inverse de H vérifie donc

$$z = z' - \mu(\alpha_1(\theta, \sqrt{|\mu|})z' + \alpha_2(\theta, \sqrt{|\mu|})\bar{z}') + o(|\mu|)z' + o(|\mu|)\bar{z}'.$$

Après le changement de variables la nouvelle application

$$F' = (f', \Phi', \mu)$$

vérifie

$$\Phi'(\theta', z', \mu) = \lambda_0(\theta') [z' + \mu(\lambda'_1(\theta', \sqrt{|\mu|})z' + \lambda'_2(\theta', \sqrt{|\mu|})\bar{z}')] + o(|\mu|)z' + o(|\mu|)\bar{z}' + O(|z'|^2)$$

avec

$$\lambda'_1(\theta', \eta) = \lambda_1(\theta') + \alpha_1[g(\theta') + O(|\mu|) + O(|z'|), \eta] - \alpha_1(\theta', \eta),$$

$$\lambda'_2(\theta', \eta) = \lambda_2(\theta') + \alpha_2[g(\theta') + O(|\mu|) + O(|z'|), \eta] \overline{\lambda_0(\theta')^2} - \alpha_2(\theta', \eta).$$

D'après la deuxième partie du lemme V-2.3.

$$\mu \lambda'_1(\theta', \sqrt{|\mu|}) = \mu [\lambda_1(\theta') + \alpha_1(g(\theta'), \sqrt{|\mu|}) - \alpha_1(\theta', \sqrt{|\mu|})] + o(|\mu|) + o(1)|z'|,$$

$$\mu \lambda'_2(\theta', \sqrt{|\mu|}) = \mu [\lambda_2(\theta') + \alpha_2(g(\theta'), \sqrt{|\mu|}) \overline{\lambda_0(\theta')^2} - \alpha_2(\theta', \sqrt{|\mu|})] + o(|\mu|) + o(1)|z'|$$

et donc, d'après la définition de $\alpha_1(\theta, \eta)$, $\alpha_2(\theta, \eta)$

$$\mu \lambda'_1(\theta', \sqrt{|\mu|}) = \mu \lambda_1 + \mu \sqrt{|\mu|} \alpha_1(\theta, \sqrt{|\mu|}) + o(|\mu|) + o(1)|z'|,$$

$$\mu \lambda'_2(\theta', \sqrt{|\mu|}) = \mu \sqrt{|\mu|} \alpha_2(\theta, \sqrt{|\mu|}) + o(|\mu|) + o(1)|z'|,$$

ce qui s'écrit (1ère partie du lemme V-2.3.)

$$\mu \lambda'_1(\theta', \sqrt{|\mu|}) = \mu \lambda_1 + o(|\mu|) + o(1)|z'|,$$

$$\mu \lambda'_2(\theta', \sqrt{|\mu|}) = o(|\mu|) + o(1)|z'|.$$

On a donc

$$\Phi'(\theta', z', \mu) = \lambda_0(\theta')(1 + \mu \lambda_1)z' + o(|\mu|)z' + o(|\mu|)\bar{z}' + O(|z'|^2)$$

ce qui démontre le Lemme V-2.2. (en ce qui concerne l'affirmation $\text{Re } \lambda_1 \neq 0$, la démonstration est analogue à celle donnée en III-2.2. au remplacement près de $d\theta$ par $d\nu$).

Montrons maintenant comment la Proposition V-2.1. découle du Lemme V-2.2.: les changements de coordonnées étant linéaires en z, \bar{z} , le spectrographe $S_0(\bar{F}_\mu)$ n'est autre que le spectrographe de l'application

$$(\theta, z) \mapsto (\tilde{f}_\mu(\theta), \lambda_0(\theta)(1 + \mu \lambda_1)z + o(|\mu||z|))$$

le raisonnement fait à la fin de la démonstration de III-2.2. est encore valable puisque $|\lambda_0(\theta)| = 1$; on en déduit que, pour $|\mu|$ assez petit, $S_0(\bar{F}_\mu)$ est à l'intérieur ($\mu < 0$) ou à l'extérieur ($\mu > 0$) du disque unité. On conclut par le Lemme II-1.5. appliqué à \bar{F}_μ avant le changement de variable.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer le Lemme V-2.3.

Démonstration du Lemme V-2.3. (première partie).

$$\eta \alpha_1(\theta, \eta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\eta}{(1+\eta)^{i+1}} \tilde{\lambda}_1(g^i(\theta)),$$

$$\eta \alpha_2(\theta, \eta) = \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\eta}{(1+\eta)^{i+1}} \varphi(\Gamma_0^i(\theta, \Psi)) \right] \cdot e^{4i\pi\Psi}.$$

Remarquons d'autre part que \bar{F}_0 laisse invariante la mesure ν sur T^{n+1} produit de la mesure ν sur T^n (qui est laissée invariante par \bar{g}) et de la mesure de Lebesgue $d\psi$ sur T^1 . Cette mesure est donc l'unique mesure de probabilité invariante par \bar{F}_0 . Il est clair que

$$\int_{T^n \times T^1} \varphi d\nu = \int_0^1 \left[\int_{T^n} \lambda_2 d\nu \right] e^{-4i\pi\psi} d\psi = 0.$$

Comme d'autre part $\int_{T^n} \tilde{\lambda}_1 d\nu = 0$, on est amené à démontrer le

V-2.4. Lemme. Soit $\Gamma: T^N \rightarrow T^N$ un homéomorphisme uniquement ergodique laissant invariante la mesure de probabilité ν sur T^N . Soit $\varphi: T^N \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\int_{T^N} \varphi d\nu = 0$. Les fonctions définies par les séries normalement convergentes pour $\eta > 0$,

$$S(\eta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\eta}{(1+\eta)^{i+1}} (\varphi \circ \Gamma^i)$$

convergent uniformément vers 0 lorsque η tend vers 0.

Démonstration du Lemme V-2.4. Posons

$$S_p(\eta) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\eta}{(1+\eta)^{i+1}} (\varphi \circ \Gamma^i).$$

On a

$$S(\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S_p \circ \Gamma^{kp}}{(1+\eta)^{kp}}.$$

Soit $\mathfrak{S}_p = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi \circ \Gamma^i$; il vient

$$S_p(\eta) = \eta \mathfrak{S}_p + S'_p(\eta)$$

avec

$$S'_p(\eta) = \sum_{i=0}^{p-1} \eta \left(\frac{1}{(1+\eta)^{i+1}} - 1 \right) (\varphi \circ \Gamma^i).$$

Remarquons

$$\sum_{i=0}^{p-1} \eta \left(\frac{1}{(1+\eta)^{i+1}} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{(1+\eta)^p} - p\eta.$$

On a donc

$$\|S'_p(\eta)\|_{C^0} \leq \left| 1 - \frac{1}{(1+\eta)^p} - p\eta \right| \cdot \|\varphi\|_{C^0}.$$

D'autre part

$$\eta \mathfrak{S}_p = \eta p \frac{\mathfrak{S}_p}{p}.$$

On en déduit

$$\|S_p(\eta)\|_{C^0} \leq \left| 1 - \frac{1}{(1+\eta)^p} - p\eta \right| \cdot \|\varphi\|_{C^0} + |\eta p| \cdot \left\| \frac{\mathfrak{S}_p}{p} \right\|_{C^0}.$$

Puisque Γ est uniquement ergodique et que $\int_{T^n} \varphi \, d\nu = 0$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| \frac{\mathfrak{S}_{p_0}}{p_0} \right\|_{C^0} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'autre part, p_0 étant fixé, il existe $\eta_0 > 0$ tel que si $\eta \leq \eta_0$ on ait

$$\left| 1 - \frac{1}{(1+\eta)^{p_0}} - p_0\eta \right| \cdot \|\varphi\|_{C^0} \leq |\eta p_0| \cdot \frac{\varepsilon}{4}$$

en effet

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{|\eta p_0|} \left| 1 - \frac{1}{(1+\eta)^{p_0}} - p_0\eta \right| \right] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \left[-\frac{(p_0+1)}{2} + O(\eta) \right] = 0.$$

On a donc, pour $\eta \leq \eta_0$,

$$\|S_{p_0}(\eta)\|_{C^0} \leq |\eta p_0| \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit, si $\eta \leq \eta_0$,

$$\|S(\eta)\|_{C^0} \leq p_0 \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\eta)^{kp_0}} = \frac{\varepsilon}{2} \eta p_0 \frac{(1+\eta)^{p_0}}{(1+\eta)^{p_0} - 1}.$$

Enfin,

$$\eta p_0 \frac{(1 + \eta)^{p_0}}{(1 + \eta)^{p_0} - 1} = 1 + \eta \frac{(p_0 + 1)}{2} + O(\eta^2).$$

Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que, si $\eta \leq \eta_1$, $\left| \eta p_0 \frac{(1 + \eta)^{p_0}}{(1 + \eta)^{p_0} - 1} \right| \leq 2$. On en déduit que, si $\eta \leq \inf(\eta_0, \eta_1)$, on a $\|S(\eta)\|_{C^0} \leq \varepsilon$ ce qui démontre le lemme V-2.4. et donc la première partie du lemme V-2.3.

Démonstration du lemme V-2.3. (2ème partie). L’assertion concernant α_1 est évidente sur la formule

$$\eta^2 D_\theta \alpha_1(\theta, \eta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\eta^2}{(1 + \eta)^{i+1}} D \tilde{\lambda}_1(g^i(\theta)) D g^i(\theta)$$

puisque, d’après l’hypothèse,

$$\sup_{\substack{\theta \in T^n \\ i \in \mathbb{N}}} \|D g^i(\theta)\| < +\infty.$$

L’assertion concernant α_2 est un tout petit peu plus fine: on écrit

$$\alpha_2(\theta, \eta) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda_2(g^j(\theta))}{(1 + \eta)^{j+1}} e^{-4i\pi \left[\sum_{k=0}^{j-1} \Omega_0(g^k(\theta)) \right]}.$$

En effectuant un changement de coordonnées de classe C^1 , on peut supposer que $g(\theta) = \theta + \omega_0$, et donc que

$$\alpha_2(\theta, \eta) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda_2(\theta + j\omega_0)}{(1 + \eta)^{j+1}} e^{-4i\pi \left[jq \cdot \theta + \frac{j(j-1)}{2} q \cdot \omega_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \hat{\Omega}_0(\theta + k\omega_0) \right]}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} D_\theta \alpha_2(\theta, \eta) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{D \lambda_2(\theta + j\omega_0)}{(1 + \eta)^{j+1}} e^{-4i\pi[\dots]} \\ &\quad - 4i\pi \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda_2(\theta + j\omega_0)}{(1 + \eta)^{j+1}} \left[jq + \sum_{k=0}^{j-1} D \hat{\Omega}_0(\theta + k\omega_0) \right] e^{-4i\pi[\dots]} \end{aligned}$$

où on a noté q la forme linéaire

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n q_i x_i.$$

On en déduit que

$$\eta^2 \|D_\theta \alpha_2(\theta, \eta)\| \leq 1 + 2 + 3,$$

avec

$$\begin{aligned} 1 &= \|\lambda_2\|_{C^1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\eta^2}{(1 + \eta)^{j+1}}, \\ 2 &= 4\pi \|\lambda_2\|_{C^0} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\eta^2 \left\| \sum_{k=0}^{j-1} D \hat{\Omega}_0(\theta + k\omega_0) \right\|_{C^0}}{(1 + \eta)^{j+1}}, \\ 3 &= 4\pi \cdot \|q\| \cdot \left\| \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\eta^2 j \lambda_2(\theta + j\omega_0)}{(1 + \eta)^{j+1}} e^{-4i\pi[\dots]} \right\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Il est évident que le terme 1 est un $o(1)$ lorsque $\eta \rightarrow 0$.

Pour voir que le terme 2 est un $o(1)$, on remarque que les sommes de Birkhoff $\frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\Omega}_0(\theta + k\omega_0)$ convergent dans la topologie C^1 vers la constante $\int_{T^n} \widehat{\Omega}_0(\theta) d\theta$ (voir [8] chapitre IV lemme 5.1.3.).

En particulier, si $\varepsilon_j = \left\| \sum_{k=0}^{j-1} D\widehat{\Omega}_0(\theta + k\omega_0) \right\|_{C^0}$, on a $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_j}{j} = 0$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que si $T(\eta)$ désigne la somme

$$T(\eta) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\eta^2 \varepsilon_j}{(1+\eta)^{j+1}}$$

et si ε_j est un $o(j)$, alors $T(\eta)$ est un $o(1)$:

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $j > j_0$, $\frac{\varepsilon_j}{j} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} T(\eta) &= \sum_{j=0}^{j_0} \frac{\eta^2 \varepsilon_j}{(1+\eta)^{j+1}} + \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} \frac{\eta^2 \varepsilon_j}{(1+\eta)^{j+1}} \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq j \leq j_0} \varepsilon_j \right) \sum_{j=0}^{j_0} \frac{\eta^2}{(1+\eta)^{j+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} \frac{\eta^2 j}{(1+\eta)^{j+1}} \end{aligned}$$

le premier terme est majoré par constante $\times \eta^2$ pour η borné; le deuxième s'écrit

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{1 + (j_0 + 2)\eta}{(1+\eta)^{j_0+2}}.$$

Si η est assez petit, on a donc $T(\eta) \leq \varepsilon$.

Considérons enfin le terme 3: avec les notations introduites au début de V-2., nous devons évaluer

$$\left\| \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\eta^2 j (\varphi \circ \Gamma_0^j)(\theta, \psi)}{(1+\eta)^{j+1}} \right\|_{C^0},$$

ce qui se fait grâce au complément suivant du lemme V-2.4.:

V-2.4. bis Lemme. Avec les notations du lemme V-2.4. les fonctions définies par les séries normalement convergentes pour $\eta > 0$

$$R(\eta) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\eta^2 j}{(1+\eta)^{j+1}} (\varphi \circ \Gamma^j)$$

convergent uniformément vers 0 lorsque η tend vers 0.

Démonstration du Lemme V-2.4. bis. Posons

$$R_p(\eta) = \eta S_p(\eta) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\eta^2}{(1+\eta)^{i+1}} (\varphi \circ \Gamma^i).$$

En regroupant les termes de la série normalement convergente $R(\eta)$ on écrit

$$R(\eta) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{R_p \circ \Gamma^{k+jp}}{(1+\eta)^{k+jp}}.$$

Reprenons p_0 et η_0 déterminés dans la démonstration du lemme V-2.4.; si $\eta \leq \eta_0$ on a

$$\|R_{p_0}(\eta)\|_{C^0} \leq |\eta^2 P_0| \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|R(\eta)\|_{C^0} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|\eta^2 P_0|}{(1+\eta)^{k+jp_0}} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \eta \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+\eta)^k} \right) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\eta p_0}{(1+\eta)^{jp_0}} \cdot \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Si enfin $\eta \leq \inf(\eta_0, \eta_1)$ (notations de la démonstration du lemme V-2.4.),

$$\|R(\eta)\|_{C^0} \leq \eta \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+\eta)^k} \right) \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

ce qui démontre le lemme V-2.4. bis, et donc la deuxième partie du lemme V-2.3.

La proposition V-2.1. est donc démontrée.

V-2.5. *Remarque.* Si on se reporte aux expressions définissant α_1 et α_2 on constate qu'on n'a pas vraiment utilisé l'unique ergodicité de \bar{F}_0 mais seulement

- 1) l'unique ergodicité de \bar{g} ,
- 2) la convergence uniforme vers une constante des sommes de Birkhoff

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \varphi \circ \Gamma_0^i \text{ pour la fonction particulière } \varphi(\theta, \psi) = \lambda_2(\theta) e^{-4i\pi\psi}.$$

Cette dernière convergence est en particulier assurée dans le cas suivant (où \bar{F}_0 n'est pas uniquement ergodique): \bar{g} est C^0 -conjugué à une rotation ergodique de T^n d'angle $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$ (par exemple $n=1$ et $\rho(g) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) et $\lambda_0(\theta) = \lambda_0 e^{2i\pi\Omega_0}$ est indépendante de θ et vérifie $\Omega_0 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}^n \cdot \omega_0 + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Il suffit pour le voir de reprendre la démonstration classique par séries de Fourier de l'unique ergodicité d'une rotation irrationnelle de T^1 telle qu'elle est décrite dans ([3] appendice 9).

On en déduit la possibilité de supprimer les conditions diophantiennes dans les hypothèses du Lemme III-2.2., c'est-à-dire d'y remplacer (H'_1) , (H'_2) par (H_1) , (H_2) .

V-2.6. *Remarque.* Si ω_0 vérifie la condition

$$\exists 0 < \varepsilon < 1, \exists C > 0, \forall q \in \mathbb{Z}^n - 0, \forall p \in \mathbb{Z}, |q \cdot \omega_0 - p| > \frac{C}{|q|^{n+\varepsilon}},$$

un changement de variables (avec perte de différentiabilité) nous ramène au cas où $\hat{\Omega}_0(\theta)$ est indépendant de θ .

V-2.7. *Remarque.* Lorsque $f(\theta, z, \mu) = g(\theta)$ est indépendant de z et de μ , la proposition V-2.1. est valable sous les hypothèses suivantes:

C_1 vérifiée, $k \geq 2$, \bar{F}_0 uniquement ergodique (ce qui entraîne \bar{g} uniquement ergodique), $\frac{d}{d\mu} \left[\int_{T^n} \text{Log} |\det A_\mu(\theta)| dv \right]_{\mu=0} \neq 0$.

En effet, le lemme V-2.2. est vrai à condition de remplacer «changement de variables de classe C^1 » par «changement de variables continu».

V-3. Suppression de certaines hypothèses diophantiennes

Le théorème suivant, dont la démonstration utilise les méthodes de V-2, améliore le théorème III-2.11.; en particulier, on ne suppose plus que ω_0 lui-même satisfait une condition diophantienne. Pour un théorème analogue lorsqu'on ne suppose pas que $\bar{F}_\mu(T^n \times 0) \subset T^n \times 0$ pour $\mu \neq 0$, voir [5 bis].

V-3.1. Théorème. *On reprend les notations de III-2.; on suppose que $l \geq n+5$ et que les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

$$(H'_1) \quad \bar{g} = \bar{h}^{-1} \circ \bar{R}_{\omega_0} \circ \bar{h}, \bar{h} \in \text{Diff}_0^l(T^n), \bar{R}_{\omega_0} \text{ ergodique}$$

$$(H''_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } r\Omega_0 + q \cdot \omega_0 \notin \mathbb{Z} \text{ pour } r=1, 2, 3, 4, q \in \mathbb{Z}^n \\ \quad \quad \quad \text{(élimination des résonances fortes)} \\ \text{(ii) } \exists \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1, C > 0, \text{ tels que } \forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{Z}^n - 0, \\ \quad \quad \quad |r\Omega_0 + q \cdot \omega_0 - p| > \frac{C}{|q|^{n+\varepsilon}} \text{ pour } r=1 \text{ et } r=3 \\ \quad \quad \quad \text{(conditions diophantiennes rémanentes)} \end{array} \right.$$

$$(H_3) \quad \frac{d}{d\mu} \left[\int_0^1 \text{Log} |\det A_\mu(\theta)| d\theta \right]_{\mu=0} > 0.$$

Alors, en général (i.e. si un certain coefficient $\text{Re } \alpha$ attaché à \bar{F}_0 est non nul), \bar{F}_μ possède pour $\mu > 0$ (cas $\text{Re } \alpha < 0$) (resp. pour $\mu < 0$ (cas $\text{Re } \alpha > 0$)) un tore invariant de dimension $n+1$ stable (resp. instable) dépendant continûment de μ . Ce tore est à une distance de l'ordre de $\sqrt{|\mu|}$ de $T^n \times 0$ et son domaine d'attraction (resp. de répulsion) est au moins de l'ordre de $|\mu|^{\frac{3}{2}}$.

Démonstration. On part de $F(\theta, z, \mu) = (f(\theta, z, \mu), \Phi(\theta, z, \mu))$ de classe C^l avec

$$(1) \quad \begin{aligned} f(\theta, z, \mu) &= \theta + \omega_0 + \mu f_1(\theta) + f_2(\theta)z + \bar{f}_2(\theta)\bar{z} + h_2(\theta, z) \\ &\quad + O(|\mu|^2 + |\mu||z| + |z|^3), \\ \Phi(\theta, z, \mu) &= \lambda_0 [z + \mu(\lambda_1(\theta)z + \lambda_2(\theta)\bar{z}) + A_2(\theta, z) + A_3(\theta, z)] \\ &\quad + O(|\mu|^2|z| + |\mu||z|^2 + |z|^4). \end{aligned}$$

Dans ces formules, h_2, A_2, A_3 sont homogènes en z, \bar{z} de degré respectivement 2, 2, 3. La conclusion du théorème rend naturel le changement d'échelle

$$z' = \frac{1}{\eta} z, \quad \eta = \sqrt{|\mu|}.$$

On supposera dorénavant $\mu > 0$ (le cas $\mu < 0$ est similaire). La nouvelle application F , qui est de classe C^l en $\theta, z, \eta > 0$, s'écrit (après suppression de l'accent sur z'):

$$(2) \quad \begin{aligned} f(\theta, z, \eta) &= \theta + \omega_0 + \eta(f_2(\theta)z + \bar{f}_2(\theta)\bar{z}) + \eta^2(f_1(\theta) + h_2(\theta, z)) + O(\eta^3), \\ \Phi(\theta, z, \eta) &= \lambda_0 [z + \eta A_2(\theta, z) + \eta^2(\lambda_1(\theta)z + \lambda_2(\theta)\bar{z}) + A_3(\theta, z)] + O(\eta^3). \end{aligned}$$

1er changement de variables (utilisant (H₂'')(ii)):

$$(3) \quad \begin{aligned} \theta' &= \theta + \eta(\delta_1(\theta)z + \bar{\delta}_1(\theta)\bar{z}), \\ z' &= z + \eta \sum_{p+q=2} \gamma_{pq}(\theta) z^p \bar{z}^q \end{aligned}$$

où δ_1 et γ_{pq} , respectivement de classe C^{l-n-2} et C^{l-n-3} , vérifient

$$(4) \quad \begin{aligned} f_2(\theta) + \lambda_0 \delta_1(\theta + \omega_0) - \delta_1(\theta) &= 0, \\ \xi_{pq}(\theta) + \lambda_0^p (\bar{\lambda}_0)^{q+1} \gamma_{pq}(\theta + \omega_0) - \gamma_{pq}(\theta) &= 0, \quad p+q=2 \end{aligned}$$

où on a noté

$$A_2(\theta, z) = \sum_{p+q=2} \xi_{pq}(\theta) z^p \bar{z}^q.$$

On obtient ainsi une application de classe C^{l-n-3} en $\theta, z, \eta > 0$, qui (après suppression des accents) s'crit

$$(5) \quad \begin{cases} f(\theta, z, \eta) = \theta + \omega_0 + \eta^2(f_1(\theta) + k_2(\theta, z)) + O(\eta^3), \\ \Phi(\theta, z, \eta) = \lambda_0[z + \eta^2(\lambda_1(\theta)z + \lambda_2(\theta)\bar{z} + B_3(\theta, z))] + O(\eta^3), \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} k_2(\theta, z) &= \sum_{p+q=2} f_{pq}(\theta) z^p \bar{z}^q, \quad f_{pq} \in C^{l-n-3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n), \\ B_3(\theta, z) &= \sum_{p+q=3} \xi_{pq}(\theta) z^p \bar{z}^q, \quad \xi_{pq} \in C^{l-n-4}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

2ème changement de variables (utilisant (H₁) et (H₂'')(i)):

$$(6) \quad \begin{aligned} \theta' &= \theta + \eta^2(\beta(\theta, \eta) + \sum_{p+q=2} \delta_{pq}(\theta, \eta) z^p \bar{z}^q), \\ z' &= z + \eta^2(\alpha_1(\theta, \eta)z + \alpha_2(\theta, \eta)\bar{z} + \sum_{p+q=3} \gamma_{pq}(\theta, \eta) z^p \bar{z}^q), \end{aligned}$$

où $\beta, \delta_{pq}, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_{pq}$ vérifient (pour $\eta > 0$)

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1(\theta) + \beta(\theta + \omega_0, \eta) - (1 + \eta)\beta(\theta, \eta) &= \omega_1 \equiv \int_{T^n} f_1(\theta) d\theta, \\ \lambda_1(\theta) + \alpha_1(\theta + \omega_0, \eta) - (1 + \eta)\alpha_1(\theta, \eta) &= \lambda_1 \equiv \int_{T^n} \lambda_1(\theta) d\theta, \\ \lambda_2(\theta) + (\bar{\lambda}_0)^2 \alpha_2(\theta + \omega_0, \eta) - (1 + \eta)\alpha_2(\theta, \eta) &= 0, \\ f_{pq}(\theta) + \lambda_0^p (\bar{\lambda}_0)^q \delta_{pq}(\theta + \omega_0, \eta) - (1 + \eta)\delta_{pq}(\theta, \eta) &= \begin{cases} 0 & \text{si } (p, q) \neq (1, 1) \\ \omega_2 \equiv \int_{T^n} f_{11}(\theta) d\theta & \text{sinon,} \end{cases} \\ \xi_{pq}(\theta) + \lambda_0^p (\bar{\lambda}_0)^{q+1} \gamma_{pq}(\theta + \omega_0, \eta) - (1 + \eta)\gamma_{pq}(\theta, \eta) &= \begin{cases} 0 & \text{si } (p, q) \neq (2, 1) \\ \alpha \equiv \int_{T^n} \xi_{21}(\theta) d\theta & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Par exemple,

$$\alpha_2(\theta, \eta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\bar{\lambda}_0)^{2i} \lambda_2(\theta + i\omega_0)}{(1 + \eta)^{i+1}};$$

exactement comme à la remarque V-2.5., on montre que les sommes de Birkhoff $\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} (\bar{\lambda}_0)^{2i} \lambda_2(\theta + i\omega_0)$ convergent uniformément vers 0 lorsque $p \rightarrow +\infty$; il en est bien entendu de même des sommes obtenues en dérivant terme à terme par rapport à θ autant de fois que c'est possible, ce qui montre que la convergence a lieu dans la topologie C^{l-2} (dérivabilité de λ_2). On en déduit comme en V-2.4. que $\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\eta \alpha_2(\theta, \eta)\|_{C^{l-2}} = 0$.

On voit ainsi que (6) est bien un changement de variables (de classe C^{l-n-4} seulement à cause des γ_{pq}) et que, si on pose

$$\zeta(\eta) = \sup(\eta, \|\eta \beta(\theta, \eta)\|_{C^{l-n-1}}, \|\eta \alpha_i(\theta, \eta)\|_{C^{l-n-1}} \ i=1, 2, \\ \|\eta \delta_{pq}(\theta, \eta)\|_{C^{l-n-1}} \ p+q=2, \|\eta \gamma_{pq}(\theta, \eta)\|_{C^{l-n-1}} \ p+q=3),$$

$\zeta(\eta)$ est une fonction continue de $\eta > 0$ qui tend vers 0 lorsque η tend vers 0. La nouvelle application F , de classe C^{l-n-4} en $\theta, z, \eta > 0$, s'écrit (après suppression des accents):

$$(8) \quad \begin{aligned} f(\theta, z, \eta) &= \theta + \omega_0 + \eta^2(\omega_1 + \omega_2 |z|^2) + \eta^2 O(\zeta), \\ \Phi(\theta, z, \eta) &= \lambda_0 [1 + \eta^2(\lambda_1 + \alpha |z|^2)] z + \eta^2 O(\zeta). \end{aligned}$$

Passons en coordonnées polaires en posant, comme en III-2.7.,

$$\begin{aligned} z &= r e^{2i\pi\psi}, \quad f(\theta, r e^{2i\pi\psi}, \eta) = \Theta(\theta, \psi, r, \eta), \\ \Phi(\theta, r e^{2i\pi\psi}, \eta) &= R(\theta, \psi, r, \eta) e^{2i\pi\Psi(\theta, \psi, r, \eta)} \end{aligned}$$

On a

$$(9) \quad \begin{aligned} \Theta(\theta, \psi, r, \eta) &= \theta + \omega_0 + \eta^2(\omega_1 + \omega_2 r^2) + \eta^2 O(\zeta), \\ \Psi(\theta, \psi, r, \eta) &= \psi + \Omega_0 + \frac{\eta^2}{2\pi} (\text{Im } \lambda_1 + r^2 \text{Im } \alpha) + \eta^2 O(\zeta), \\ \mathbb{R}(\theta, \psi, r, \eta) &= r(1 + \eta^2(\text{Re } \lambda_1 + r^2 \text{Re } \alpha)) + \eta^2 O(\zeta). \end{aligned}$$

Supposons $\text{Re } \alpha < 0$ (si $\mu < 0$, on supposerait $\text{Re } \alpha > 0$) et posons $r_0 = \sqrt{-\frac{\text{Re } \lambda_1}{\text{Re } \alpha}}$, la stricte positivité de $\text{Re } \lambda_1$ étant assurée par (H₃).

Dernier changement de variables: posons

$$(10) \quad r = r_0(1 + \sqrt{\zeta} y), \quad R = r_0(1 + \sqrt{\zeta} Y);$$

avec un léger abus de notation, la nouvelle application s'écrit:

$$(11) \quad \begin{aligned} \Theta(\theta, \psi, y, \eta) &= \theta + \omega_0 + \eta^2(\omega_1 + \omega_2 r_0^2) + \eta^2 O(\sqrt{\zeta}), \\ \Psi(\theta, \psi, y, \eta) &= \psi + \Omega_0 + \frac{\eta^2}{2\pi} (\text{Im } \lambda_1 + r_0^2 \text{Im } \alpha) + \eta^2 O(\sqrt{\zeta}), \\ Y(\theta, \psi, y, \eta) &= (1 - 2\eta^2 \text{Re } \lambda_1) y + \eta^2 O(\sqrt{\zeta}). \end{aligned}$$

La technique utilisée au paragraphe III-2.9. s'applique maintenant sans problème puisque $\lim_{\eta \rightarrow 0} \sqrt{\zeta} = 0$.

Le théorème V-3.1. est ainsi démontré dans le cas $\mu > 0$ (c'est-à-dire $\operatorname{Re} \alpha < 0$); le cas $\mu < 0$ (c'est-à-dire $\operatorname{Re} \alpha > 0$) est analogue.

V-4. Un contre-exemple

Dans tout ce paragraphe on identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} . Soit $F_\mu: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ l'application définie par

$$F_\mu(\theta, z) = (\theta + \omega, (1 + \mu - |z|^2) z e^{2i\pi(\Omega + |z|^4 \gamma(\theta))})$$

où $\gamma \in C^\infty(T^1, \mathbb{R})$ vérifie

$$\int_0^1 \gamma(\theta) d\theta = 0,$$

et où $\omega \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

L'application $\bar{F}_\mu: T^1 \times \mathbb{C} \rightarrow T^1 \times \mathbb{C}$ qui s'en déduit par passage au quotient a manifestement les propriétés suivantes:

- 1) pour $\mu \leq 0$ le cercle invariant $T^1 \times 0$ est asymptotiquement stable;
- 2) pour $\mu > 0$ le cercle invariant est instable et le tore T^2 d'équation $|z| = \sqrt{\mu}$ est invariant et asymptotiquement stable.

La transformée de graphes \mathcal{F}_μ associée à \bar{F}_μ peut être définie de $C^0(T^1; \mathbb{C})$ dans $C^0(T^1; \mathbb{C})$ par la formule explicite

$$(\mathcal{F}_\mu X)(\theta) = (1 + \mu - |X(\theta - \omega)|^2) X(\theta - \omega) e^{2i\pi(\Omega + |X(\theta - \omega)|^4 \gamma(\theta - \omega))}.$$

Elle est de classe C^1 et sa dérivée en l'origine $D\mathcal{F}_\mu(0) = \mathcal{A}_\mu$ est définie par

$$(\mathcal{A}_\mu X)(\theta) = (1 + \mu) X(\theta - \omega) e^{2i\pi\Omega}.$$

Les valeurs propres de \mathcal{A}_μ sont les $(1 + \mu) e^{\pm 2i\pi(\Omega - q\omega)}$ $q \in \mathbb{Z}$; elles sont toutes non réelles et de multiplicité un si on suppose que $\Omega \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cdot \omega + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Le spectre $S_0(\bar{F}_\mu)$ de \mathcal{A}_μ coïncide avec le cercle de rayon $1 + \mu$.

Remarquons que lorsque μ traverse la valeur 0, les valeurs propres de \mathcal{A}_μ traversent transversalement le cercle unité et sont rationnellement indépendantes. D'autre part, on déduit des propriétés de \bar{F}_μ mentionnées ci-dessus que pour $\mu = 0$, l'origine est encore asymptotiquement stable pour \mathcal{F}_0 .

V-4.1. Proposition. Si $\gamma \in C^\infty(T^1; \mathbb{R})$ est choisi de façon que l'équation aux différences

$$\gamma(\theta) = \delta(\theta + \omega) - \delta(\theta)$$

n'ait pas de solution $\delta \in C^0(T^1; \mathbb{R})$ (ce qui est possible si ω est un irrationnel trop bien approché par les rationnels) l'application \mathcal{F}_μ ne possède (quel que soit μ) ni point périodique autre que 0, ni cycle invariant minimal de classe C^0 .

V-4.2. *Commentaire.* Les hypothèses que vérifie la famille \mathcal{F}_μ sont une généralisation naturelle au cadre Banachique (on aurait aussi pu choisir un

Hilbert* tel que $H^1(T^1; \mathbb{R}^2)$) des hypothèses classiques de bifurcation du type Hopf. Bien entendu, si r couples de valeurs propres de \mathcal{F}_0 se trouvent sur le cercle unité, il est naturel de considérer des déformations à r paramètres de \mathcal{F}_0 , et notre exemple est donc «de codimension infinie».

Cependant, dans le cas de familles à un paramètre de champs de vecteurs E_μ , les méthodes topologiques de [1] montrent que si un nombre fini de couples de valeurs propres simples imaginaires conjuguées traversent l'axe des imaginaires pour $\mu=0$, le reste du spectre vérifiant $\text{Re } \lambda < \varepsilon$, il existe pour μ non nul proche de 0 (positif ou négatif suivant les cas) au moins une orbite périodique de E_μ .

Pour des familles de difféomorphismes la situation analogue est moins claire et seuls des résultats partiels existent ([13], [14], [18]). Noter qu'on suppose toujours que 0 est un attracteur vague pour $\mu=0$.

V-4.3. Démonstration de la Proposition V-4.1.

Notations: On commence par montrer sans difficulté que

- (i) pour $\mu \leq 0$ le seul compact de $C^0(T^1; \mathbb{C})$ invariant par \mathcal{F}_μ et minimal est 0.
- (ii) pour $\mu > 0$ tout compact de $C^0(T^1; \mathbb{C})$ invariant par \mathcal{F}_μ , non réduit à 0, et minimal, est forcément contenu dans le sous-ensemble de $C^0(T^1; \mathbb{C})$, isomorphe à $C^0(T^1; T^1)$, formé des applications de T^1 dans \mathbb{C} à valeurs dans le cercle d'équation $|z| = \sqrt{\mu}$.

Seule nous intéresse donc, pour $\mu > 0$, la restriction de \bar{F}_μ au tore invariant d'équation $|z| = \sqrt{\mu}$ dans $T^1 \times \mathbb{C}$; nous noterons encore $\bar{F}_\mu: T^1 \times T^1 \rightarrow T^1 \times T^1$ cette restriction, et $F_\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le relèvement défini par

$$F_\mu(\theta, \psi) = (\theta + \omega, \psi + \beta_\mu(\theta)),$$

où

$$\beta_\mu(\theta) = \Omega + \mu^2 \gamma(\theta).$$

Soit C un compact, et soit

$$\bar{l}: C \hookrightarrow C^0(T^1; T^1)$$

un homéomorphisme sur son image tel que $\bar{l}(C)$ soit un compact invariant par \mathcal{F}_μ .

On identifiera \bar{l} à une application continue

$$\bar{l}: T^1 \times C \rightarrow T^1.$$

L'invariance se traduit par l'existence d'une application (ensembliste)

$$\bar{k}: C \rightarrow C$$

* $H^1(T^1; \mathbb{R}^2)$ est l'espace de Sobolev des fonctions \mathbb{Z} -périodiques à valeurs dans \mathbb{R}^2 , de carré intégrable, et dont la dérivée au sens des distributions est de carré intégrable; le produit scalaire est

$$\langle u, v \rangle = \int_{T^1} \left[\left(\frac{du}{d\theta}, \frac{dv}{d\theta} \right)_{\mathbb{R}^2} + (u, v)_{\mathbb{R}^2} \right] d\theta.$$

telle que

$$(*) \quad \forall (\theta, \eta) \in T^1 \times C, \quad \bar{l}(\theta, \eta) + \beta_\mu(\theta) = \bar{l}(\theta + \omega, \bar{k}(\eta)).$$

Notons

$$\begin{aligned} \bar{L} &= T^1 \times C \rightarrow T^1 \times T^1, \\ \bar{K} &= T^1 \times C \rightarrow T^1 \times C. \end{aligned}$$

Les applications définies par

$$\begin{aligned} \bar{L}(\theta, \eta) &: (\theta, \bar{l}(\theta, \eta)), \\ \bar{K}(\theta, \eta) &: (\theta + \omega, \bar{k}(\eta)). \end{aligned}$$

L'identité (*) équivaut à la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} T^1 \times C & \xrightarrow{\bar{K}} & T^1 \times C \\ \bar{L} \downarrow & & \downarrow \bar{L} \\ T^1 \times T^1 & \xrightarrow{F_\mu} & T^1 \times T^1. \end{array}$$

V-4.4. Lemme. \bar{k} est un homéomorphisme.

Démonstration. On utilise (*) et le fait que \bar{l} est un homéomorphisme de C sur son image dans $C^0(T^1; T^1)$ pour montrer la continuité et l'injectivité de \bar{k} .

V-4.5. Lemme (FURSTENBERG). $\bar{F}_\mu: T^1 \times T^1 \rightarrow T^1 \times T^1$ est un difféomorphisme minimal (i.e. chaque orbite est dense dans $T^1 \times T^1$).

Démonstration. Soit $p_1: T^1 \times T^1 \rightarrow T^1$ la projection sur le premier facteur. En utilisant la commutativité des diagrammes (α quelconque dans T^1)

$$\begin{array}{ccc} T^1 \times T^1 & \xrightarrow{F_\mu} & T^1 \times T^1 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ T^1 & \xrightarrow{R_\omega} & T^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^1 \times T^1 & \xrightarrow{F_\mu} & T^1 \times T^1 \\ R_{0, \alpha} \downarrow & & \downarrow R_{0, \alpha} \\ T^1 \times T^1 & \xrightarrow{F_\mu} & T^1 \times T^1 \end{array}$$

ainsi que la minimalité de \bar{R}_ω , on montre que, si $M \subset T^1 \times T^1$ est un fermé invariant par \bar{F}_μ minimal, ou bien $M = T^1 \times T^1$, ou bien la restriction à M de p_1 est un revêtement fini (et si q est l'ordre du revêtement, M est invariant par $\bar{R}_{0, 1/q}$). En passant au quotient par l'action sur $T^1 \times T^1$ de $\bar{R}_{0, 1/q}$, M devient, dans ce dernier cas, le graphe d'une application continue de T^1 dans T^1 ; on en déduit l'existence d'une application continue $\bar{f}: T^1 \rightarrow T^1$ telle que

$$\bar{f}(\theta + \omega) = \bar{f}(\theta) + q\beta_\mu(\theta) \text{ modulo } \mathbb{Z}.$$

Si $f(\theta) = \rho\theta + \varphi(\theta)$ (φ périodique) relève \bar{f} , ceci s'écrit encore: il existe des entiers $p, k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} - 0$ tels que

$$\varphi(\theta + \omega) - \varphi(\theta) = q\mu^2\gamma(\theta) + q\Omega - p\omega + k$$

qui se décompose en deux conditions

- 1) $q\Omega - p\omega + k = 0$,
- 2) $\varphi(\theta + \omega) - \varphi(\theta) = \mu^2 \gamma(\theta)$.

L'hypothèse interdisant 2), le lemme est démontré.

V-4.6. Corollaire. \mathcal{F}_μ n'a pas d'autre point périodique que 0.

Démonstration. C'est clair pour $\mu \leq 0$. Pour $\mu > 0$, la réunion des graphes des $\mathcal{F}_\mu^k X$ pour X point périodique serait un fermé de $T^1 \times T^1$ invariant par \bar{F}_μ , et non égal à $T^1 \times T^1$.

Une méthode analogue à celle de V-4.5. permet de montrer le

V-4.7. Lemme ((GOTTSHALK-HEDLUND; voir [8] chapitre IV, prop. 4.1.). L'hypothèse faite en V-4.1. sur γ équivaut à

$$\forall \theta \in T^1, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \gamma(\theta + i\omega) \right| = +\infty.$$

Montrons comment ce lemme permet de terminer la démonstration de la proposition V-4.1.: si pour $\mu > 0$, \mathcal{F}_μ possède un cycle invariant minimal, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T^1 \times T^1 & \xrightarrow{K} & T^1 \times T^1 \\ \downarrow L & & \downarrow L \\ T^1 \times T^1 & \xrightarrow{F_\mu} & T^1 \times T^1. \end{array}$$

Quitte à changer Ω en $\Omega + p$, $p \in \mathbb{Z}$, on peut relever ce diagramme en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow L & & \downarrow L \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F_\mu} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} K(\theta, \eta) &= (\theta + \omega, k(\eta)), & k \text{ relevant } \bar{k} \\ L(\theta, \eta) &= (\theta, l(\theta, \eta)), & l \text{ relevant } \bar{l}. \end{aligned}$$

C'est le fait que K ne mélange pas les variables qui, joint aux propriétés du nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle, va conduire à une contradiction avec la conclusion de V-4.7.: commençons par remarquer que K et F_μ ont tous deux des nombres de rotation: cela signifie que les deux suites de fonctions $\frac{1}{n}(K^n - \text{id})$ et $\frac{1}{n}(F_\mu^n - \text{id})$ convergent uniformément lorsque n tend vers l'infini vers les constantes

$$\begin{aligned} \rho(K) &= (\omega, \rho(k)), \\ \rho(F_\mu) &= (\omega, \Omega). \end{aligned}$$

Pour K c'est évident ($\rho(k)$ est le nombre de rotation de k). Pour F_μ c'est une conséquence de l'unique ergodicité de la rotation \bar{R}_ω qui entraîne la convergence uniforme vers 0 de la suite de fonctions $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma(\theta + i\omega)$.

Si la matrice* de $\bar{L}_* : H_1(T^1 \times T^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(T^1 \times T^1; \mathbb{Z})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire si

$$L(\theta, \eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \eta \end{pmatrix} + \Phi(\theta, \eta)$$

où Φ est \mathbb{Z}^2 -périodique, on montre facilement que

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \rho(k) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\Omega = p \cdot \omega + q \cdot \rho(k).$$

Calculons

$$\begin{aligned} & L \circ (K^n - \text{id} - n(\omega, \rho(k))) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \circ K^n - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} - n(\omega, \Omega) + \Phi \circ [K^n - \text{id} - n(\omega, \rho(k))] \\ &= L \circ K^n - L - n(\omega, \Omega) + \Phi \circ (K^n - \text{id} - n(\omega, \rho(k))) - \Phi \circ K^n + \Phi \\ &= (F_\mu^n - \text{id} - n(\omega, \Omega)) \circ L + \Phi \circ (K^n - \text{id} - n(\omega, \rho(k))) - \Phi \circ K^n + \Phi. \end{aligned}$$

Remarquons enfin que

$$\begin{aligned} K^n - \text{id} - n(\omega, \rho(k)) &= (0, k^n - \text{id} - n \cdot \rho(k)) \\ (F_\mu^n - \text{id} - n(\omega, \Omega))(\theta, \psi) &= \left(0, \mu^2 \sum_{i=0}^{n-1} \gamma(\theta + i\omega) \right). \end{aligned}$$

Une des propriétés importantes du nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle est que

$$\forall \theta \in T^1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |k^n(\theta) - \theta - n \cdot \rho(k)| \leq 1.$$

On en déduit que, pour tout $(\theta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ la suite des

$$\|(K^n - \text{id} - n(\omega, \rho(k)))(\theta, \eta)\|,$$

et donc la suite des

$$\|(F_\mu^n - \text{id} - n(\omega, \Omega))(\theta, l(\theta, \eta))\|,$$

est uniformément bornée. Ceci équivaut à

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \gamma(\theta + i\omega) \right| < +\infty$$

et contredit V-4.7. La proposition V-4.1. est donc prouvée.

* Il s'agit de l'application induite sur l'homologie à coefficients entiers.

V-4.8. *Remarque.* L'application \mathcal{F}_μ associée à l'application

$$\bar{F}_\mu: T^1 \times \mathbb{C} \rightarrow T^1 \times \mathbb{C}$$

définie par

$$\bar{F}_\mu(\theta, z) = (\theta + \omega, (1 + \mu - |z|^2)z e^{2i\pi\Omega})$$

laisse invariants tous les sous-espaces E_p de $C^0(T^1; \mathbb{C})$ de la forme

$$E_p = \{f \in C^0(T^1; \mathbb{C}), f(\theta) = \lambda e^{2i\pi p\theta}, \lambda \in \mathbb{C}\}, p \in \mathbb{Z}.$$

Si $\mu > 0$, le cercle de E_p défini par $|\lambda| = \sqrt{\mu}$ est également invariant.

La perturbation qui conduit au \bar{F}_μ que nous avons considéré détruit tous ces cercles invariants; remarquons qu'en remplaçant $|z|^4$ par $e^{-\frac{1}{|z|^2}}$ on peut rendre d'ordre infini cette perturbation sans changer la conclusion de V-4.1.

V-4.9. *Question.* Peut-on choisir ω et $\gamma(\theta)$ de façon que \mathcal{F}_μ n'ait aucun tore de dimension finie invariant et minimal?

V-5. En guise de conclusion

Nous n'avons pas réussi à nous débarasser complètement des hypothèses diophantiennes; dans une théorie où seules des formes normales approchées interviennent cela serait souhaitable; le problème est d'exprimer l'attractivité vague de $T^n \times 0$ pour \bar{F}_0 .

Nous n'avons d'autre part considéré (dans le cas non résonnant) que les bifurcations d'un tore T^{n+1} invariant par (E_μ) en un tore invariant T^{n+2} .

Cependant, dans l'hypothèse C1 de V-2, on n'exige plus que l'application $\theta \mapsto A_0(\theta)$ de T^n dans $GL(\mathbb{R}^2)$ soit homotope à une constante (ce qui n'a rien d'automatique si $\dim B > 2$); on s'attend donc à ce que le tore invariant T^{n+1} bifurque en l'espace total K_μ^{n+2} d'un fibré non trivial de base T^1 et de fibre T^{n+1} ; ce phénomène ne se rencontre pas génériquement pour $n=0$ car il correspond à une famille de difféomorphismes F_μ de $(\mathbb{R}^2, 0)$ telle que $dF_0(0)$ admette 1 et -1 comme valeurs propres.

Ce travail a été facilité par la grant NSF, MCS 73-08535 A04 pendant le séjour d'un des auteurs à l'University of Minnesota, notamment pour les photocopies et les coups de téléphone.

Les auteurs remercient D. BENNEQUIN, M. HERMAN, G. SELL, H. WEINBERGER pour les fructueuses discussions qu'ils ont eu avec eux à propos de ce travail.

Bibliographie

1. J. C. ALEXANDER & J. A. YORKE, Global bifurcation of periodic orbits. *Amer. J. of Maths*, **100**, 2, 263–292 (1978)
2. V. I. ARNOLD, Small denominators I, Mappings of the circumference onto itself. *Isviestia Akad. Nauk Serie Math.* 25.1 (1961) p. 21–86. Translation AMS, 2nd series, **46**, 213–284 (1965)

3. V. I. ARNOLD & A. AVEZ, Problèmes ergodiques de la mécanique classique. Gauthier Villars, Paris (1967)
4. A. CHENCINER, Cours à l'Ecole Normale Supérieure, Paris 1977-78
5. A. CHENCINER & G. IOOSS, Bifurcation d'un tore T^2 en un tore T^3 . C.R. Acad. Sci. Paris, **284**, A, 1207-1210 (1977)
- 5 bis. A. CHENCINER & G. IOOSS, Persistence et bifurcation de tores invariants (à paraître)
6. N. FENICHEL, Persistence and smoothness of Invariant Manifolds of Flows. Indiana University Math. J. **21**, 3, 193-226 (1971)
7. W. GOTTSCHALK & G. A. HEDLUND, Topological dynamics. AMS colloquium, pub. vol. XXXVI, Providence (1955)
8. M. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Publ. I.H.E.S. Paris (à paraître) [Les renvois sont à la thèse de M. HERMAN et non au texte définitif]
9. M. HERMAN, Mesure de Lebesgue et nombre de rotation. Lecture Notes in Maths. Vol. 597, Springer (1977)
10. M. W. HIRSCH, C. C. PUGH & M. SHUB, Invariant manifolds. Lecture Notes in Maths, Vol. 583, Springer (1977)
11. G. IOOSS, Sur la deuxième bifurcation d'une solution stationnaire de systèmes du type Navier-Stokes. Arch. Rational Mech. Anal. **64**, 4, 339-369 (1977)
12. G. IOOSS, Cours à l'University of Minnesota, Minneapolis (1977-78)
13. G. IOOSS & D. D. JOSEPH, Bifurcation and stability of nT -periodic solutions branching from T -periodic solutions at points of resonance. Arch. Rational Mech. Anal. **66**, 2, 135-172 (1977)
14. R. JOST & E. ZEHNDER, A generalization of Hopf bifurcation theorem. Helvetica Physica Acta, **45**, 258-276 (1972)
15. А. Б. Крыгин, Об ω -предельных множествах цилиндрического каскада. Известия акад. наук СССР, серия мат. **39**, 4, 879-898 (1975)
16. O. E. LANFORD III, Bifurcation of periodic solutions into invariant tori. Lecture Notes in Math, Vol. **322**, 159-192, Springer (1973)
17. J. E. MARSDEN & M. MCCrackEN, The Hopf bifurcation and its applications. Applied Mathematical Sciences 19, Springer (1976)
18. D. RUELLE & F. TAKENS, On the nature of turbulence. Comm. Maths. Phys. **20**, 167-192 (1971)
19. R. J. SACKER, On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. New York Univ. IMM-NYU, 333 (1964)
20. S. STERNBERG, Celestial Mechanics, part II. Benjamin (1969)

Institut de Mathématiques
et Sciences Physiques
Université de Nice

(Manuscript reçu le 3 juin 1978)